Formelsammlung

Schubfachprinzip:

- Verteilt man $n+1$ Kugeln auf n Schubfächer, so gibt es ein Fach, wo mindestens zwei Kugeln liegen.

Extremalprinzip:

- Jede *endliche* nichtleere Menge A von *reellen Zahlen* hat ein kleinstes Element $\min A$ und ein größtes Element $\max A$.
- Jede *beliebige* (also endliche oder unendliche) nichtleere Menge von *natürlichen Zahlen* hat ein kleinstes Element. Ein größtes Element hat sie natürlich nicht immer.

Invariantenmethode:

- Eine Invariante ist eine Funktion, die sich im Laufe eines Prozesses (z.B. bei Anwendung bestimmter Operationen) nicht ändert. Ist diese Funktion für zwei Konstellationen unterschiedlich, so steht damit fest, dass man von einem dieser Zustände den anderen nicht erreichen kann.

Anwendung geometrischer Abbildungen / Klassifizierung / Verkettung.

Fixpunkte $\Downarrow$	gleichsinnige Abbildung	gegensinnige Abbildung
keine	Translation	Gleitspiegelung
ein	Drehung	-
eine Gerade	-	Achsenspiegelung
$\mathbf{R}^2$	Identitätsabbildung	-

Schwerpunkt:

- Seien $(X_k, a_k)_{k\in\{1,2,...,K\}}$ und $(X_k, b_k)_{k\in\{1,2,...,K\}}$ zwei Punktmassensysteme mit den gleichen Punkten X_1, X_2, ..., X_k, wobei die Massen $a_k \in \mathbb{R}$, $b_k \in \mathbb{R}$ die Bedingungen

  $$A = \sum_{k=1}^{K} a_k \neq 0, \quad B = \sum_{k=1}^{K} b_k \neq 0 \text{ und } M = A + B \neq 0$$

  erfüllen. Ferner sei S_a der Schwerpunkt des Systems (X_k, a_k), und S_b der Schwerpunkt des Systems (X_k, b_k). Wir bezeichnen mit S den Schwerpunkt der zwei Punktmassen (S_a, A) und (S_b, B). Dann ist S der Schwerpunkt X des Punktmassensystems $(X_k, a_k + b_k)_{k\in\{1,2,...,K\}}$ ist.

Ungleichungen.

- **Jensen:** f sei konvex auf $[a;b]$. Dann gilt

$$f(\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + ... + \alpha_n f(x_n)$$

für alle $\alpha_j \geq 0$ mit $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$.

- **Rearrangement (Spezialfall)**: Seien $a_1 < a_2 < ... < a_n$ und $b_1 < b_2 < ... < b_n$ zwei endliche Folgen. Ferner sei $b_{i_1}, b_{i_2}, ..., b_{i_n}$ eine Permutation (Umordnung) der Folge (b_i). Die Summe

$$S = a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + ... + a_n b_{i_n}$$

a) ist dann am grössten, wenn $b_{i_1} = b_1$, $b_{i_2} = b_2$, ..., $b_{i_n} = b_n$ gilt (d. h. die Folgen a_1, a_2, ..., a_n und b_{i_1}, b_{i_2}, ..., b_{i_n} sind **gleichgeordnet**);
b) ist dann am kleinsten, wenn $b_{i_1} = b_n$, $b_{i_2} = b_{n-1}$, ..., $b_{i_n} = b_1$ gilt (d. h. die Folgen a_1, a_2, ..., a_n und b_{i_1}, b_{i_2}, ..., b_{i_n}sind **gegengeordnet**).

- **AM-GM:** Für positive a_j, $j = 1, 2, ..., N$, gilt

$$\frac{1}{N}(a_1 + ... + a_N) \geq \sqrt[N]{a_1 \cdot ... \cdot a_N}.$$

Gleichheit tritt nur bei $a_1 = ... = a_N$ auf.

- **Young**: Sei f monoton steigend und stetig auf dem Intervall $[0, c]$ mit $f(0) = 0$, φ sei die inverse Funktion zu f (d.h. $f(\varphi(\tau)) = \tau$ bzw. $\varphi(f(t)) = t$). Dann gilt für jedes $a \in [0, c]$ und jedes $b \in [0, f(c)]$:

$$ab \leq \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b \varphi(\tau)\,d\tau.$$

Gleichheit tritt nur bei $b = f(a)$ auf. Insbesondere gilt

$$ab \leq af(a) + b\varphi(b).$$

- **Cauchy-Schwarz:** Für alle $a \in \mathbb{R}^N$ und $b \in \mathbb{R}^N$ gilt

$$|a_1 b_1 + ... + a_N b_N| \leq \sqrt{a_1^2 + ... + a_N^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + ... + b_N^2}.$$

Gleichheit tritt genau dann, wenn die Vektoren a und b kollinear sind, d. h. wenn $a = \lambda b$ oder $b = 0$ ist.