4 Planare Graphen

Bisher wurden Graphen abstrakt durch Mengen E und K und eine Abbildung $\psi : K \to \mathcal{P}(E)$ definiert. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit einem Abschnitt der sogenannten „topologischen" Graphentheorie. Hier werden konkret Ecken als Punkte der Ebene angesehen und Kanten als Kurven in der Ebene, die diese Punkte verbinden und sich nicht überschneiden. Etwas genauer definieren wir:

Definition 4.1 *Ein planarer (oder ebener) Graph besteht aus einer Eckenmenge, einer Kantenmenge und einer Flächenmenge (alle endlich) in der Ebene, so dass sich die Kanten nicht überschneiden und folgendes gilt:*

- *Genau eine Fläche ist unbeschränkt.*
- *Der Rand jeder Fläche besteht aus endlich vielen Kanten.*
- *Liegt eine Kante k auf einem Zyklus Z, so liegt k auf dem Rand genau zweier Flächen.*
- *Liegt k auf keinem Zyklus, so liegt k auf dem Rand von genau einer Fläche.*

Im folgenden sei n die Anzahl der Ecken, m die Anzahl der Kanten, f die Anzahl der Flächen und q die Anzahl der Zusammenhangskomponenten.

4.1 Die Eulersche Polyederformel

Der folgende Satz ist das Hauptthema dieses Abschnitts.

Satz 4.2 *(Eulersche Polyederformel)*
Sei G ein ebener Graph mit n Ecken, m Kanten, q Zusammenhangskomponenten und f Flächen. Dann gilt

$$n + f - m = 1 + q\,.$$

Beweis: Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach m.

$m = 0$: Dann ist $q = n$ und $f = 1$ (weshalb?). Daher ist die Formel richtig für $m = 0$.

Sei die Behauptung richtig für alle Graphen mit weniger als m Kanten, und sei G ein Graph mit m Kanten, $m \geq 1$.

1. Fall: G besitzt einen Zyklus Z. Sei $k \in Z$ eine Kante des Zyklus und definiere $G' = G - k$, d.h. G' entsteht aus G durch Streichen der Kante k. Dann ist zunächst $m' = m - 1$ und $n' = n$. Da k Randkante von zwei verschiedenen Gebieten war, so ist $f' = f - 1$. Außerdem ist $q' = q$, da die Endpunkte von k ja über den Kreis noch verbunden sind. Nach Induktionsvoraussetzung ist $n' + f' - m' = 1 + q'$, also $n + (f-1) - (m-1) = 1 + q$, also $n + f - m = 1 + q$.

2. Fall: G besitzt keinen Kreis. Dann besitzt keine Zusammenhangskomponente Kreise. Wegen $m \geq 1$ existiert eine Zusammenhangskomponente mit mindestens einer Kante. In dieser Komponente ist der Eckengrad jeder Ecke mindestens 1. Nach Satz **??** existiert eine Ecke e in dieser Komponente mit $d(e) = 1$, denn der Fall $d(e) = 0$ scheidet aus. Sei k die (einzige) Kante, die an e hängt. Definiere $G' = G - k$. Dann ist zunächst $n' = n$ und $m' = m - 1$. Da e isolierte Ecke von G', aber nicht von G ist, so ist $q' = q + 1$. Außerdem ist $f' = f$. Die Induktionsvoraussetzung liefert $n' + f' - m' = 1 + q'$, also $n + f - (m - 1) = q + 2$, also $n + f - m = q + 1$. □

Bemerkung: Da n, m, q für jeden Graphen definiert sind, so liefert die Eulersche Polyederformel auch, dass die Anzahl der Flächen für jede Einbettung eines planaren Graphen gleich ist. Daher kann man von der Anzahl der Flächen eines planaren Graphen sprechen, und die Eulersche Polyederformel gilt für jeden planaren Graphen.

Satz 4.3 *Sei G ein planarer Graph ohne doppelte Kanten mit n Ecken und m Kanten.*

(a) Ist $n \geq 3$, so ist $m \leq 3n - 6$.

(b) Es gibt wenigstens eine Ecke e mit Grad $d(e) \leq 5$.

Beweis: (a) Wegen $3n - 6 \geq 3$ ist nur der Fall $m \geq 4$ interessant (denn für $m = 1, 2, 3$ gilt die Ungleichung ja trivialerseise). Jede Fläche wird von mindestens 3 Kanten begrenzt (sonst gäbe es doppelte Kanten). Nach Definition gehört jede Kante zum Rand von höchstens 2 Flächen. Wenn man also jede Kante „doppelt zeichnet“, so kann man jedes Land mit verschiedenen Kanten begrenzen. Daher folgt $3f \leq 2m$. Die Polyederformel liefert $n + f - m = 1 + q$, also wegen $q \geq 1$:

$$m \;=\; n + f - 1 - q \;\leq\; n + \frac{2}{3}m - 1 - q \;\leq\; n + \frac{2}{3}m - 2\,,$$

also $m \leq 3n - 6$.

(b) Wir können $n \geq 3$ voraussetzen. Annahme, es sei $d(e) \geq 6$ für jede Ecke e. Der Satz 2.1 und Teil (a) würden dann

$$6n \;\leq\; \sum_{e \text{ Ecke}} d(e) \;=\; 2m \;\leq\; 6n - 12$$

liefern, was nicht möglich ist. □

Weiter unten werden wir zeigen, dass die Aussage (b) scharf ist, d.h. es gibt wirklich einen planaren Graphen ohne doppelte Kanten, in dem jede Ecke den Grad 5 hat.

Beispiele 4.4 (a) K_5 ist nicht planar.

Beweis: Andernfalls würde Teil (a) vom letzten Satz wegen $n = 5$ und $m = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ liefern: $10 = m \leq 3n - 6 = 9$, ein Widerspruch.

(b) $K_{3,3}$ ist nicht planar.

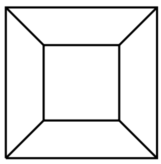
Beweis: Annahme $K_{3,3}$ ist planar, also in die Ebene einbettbar. Jede Fläche wird dann von mindestens 4 Kanten berandet (sonst würden Kreise der Länge 3 existieren, was nicht möglich ist). Also können wir wie im Satz argumentieren und erhalten: $4f \leq 2m$, d.h. $2f \leq m = 9$, d.h. $f \leq 4$. Auf der anderen Seite liefert die Polyederformel $f = 2 + m - n = 2 + 9 - 6 = 5$, ein Widerspruch.

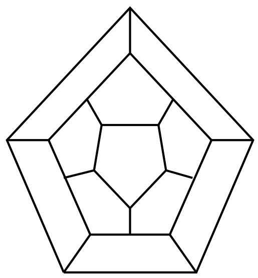
4.2 Die Platonischen Körper

Ein **Polytop** ist eine beschränkte Menge, die sich als Durchschnitt endlich vieler Halbräume im Raum darstellen lässt. Unter einem **platonischen Körper** versteht man ein Polytop, dessen Seiten ebene kongruente regelmäßige Vielecke sind, z.B. Würfel (Quadrate), Tetraeder (gleichseitige Dreiecke), Dodekaeder (regelmäßige Fünfecke).

Jedem platonischen Körper kann man in natürlicher Weise einen planaren Graphen zuordnen mit Ecken und Kanten. Man umschreibe nämlich dem Körper eine Kugel, nachdem man ihn so gedreht hat, dass der Strahl vom Mittelpunkt der Kugel durch den Nordpol der Kugel durch eine Seite stößt (und nicht durch eine Ecke oder Kante). Jetzt projiziere man Ecken und Kanten auf die Sphäre vom Mittelpunkt aus. Dies ergibt einen Graphen auf der Sphäre mit der Eigenschaft, dass der Nordpol innerhalb einer Fläche liegt. Letzt projiziere man vom Nordpol aus in die Äquatorebene. Dies liefert einen planaren Graph, die Fläche mit dem Nordpol wird die unbeschränkte äußere Fläche.

Für den Würfel und den Dodekaeder sind z.B. isomorph zu





Jetzt können wir zeigen:

Satz 4.5 *Es gibt genau 5 verschiedene platonische Körper, nämlich Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder.*

Beweis: Sei wieder n die Anzahl der Ecken, m die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Seitenflächen. Wir betrachten als Seiten regelmäßige p-Ecken, $p \geq 3$. Beim platonischen Körper stoßen an jede Ecke gleich viele Kanten an, also $d(e) = d$ für alle Ecken e. Damit reduziert sich die Formel von Satz 2.1 (nämlich $\sum_{e \in E} d(e) = 2m$) auf $dn = 2m$. Da jede Fläche p Kanten hat, folgt $pf = 2m$, d.h. $m = pf/2$. In die erste Formel eingesetzt ergibt $n = pf/d$. Die Eulersche Polyederformel liefert

$$\frac{pf}{d} + f - \frac{pf}{2} = 2\,, \quad \text{d.h.} \quad 2pf + 2df - pdf = 4d\,, \quad \text{d.h.} \quad f = \frac{4d}{2p + 2d - pd}\,.$$

Wir gehen die Fälle für d durch:

$d = 3$: Dann $f = \frac{12}{6-p}$. Da $f \in \mathbb{N}$, so ist nur $\begin{array}{c} p = 3, 4, 5 \\ f = 4, 6, 12 \end{array}$ möglich.

$d = 4$: Dann $f = \frac{16}{8-2p} = \frac{8}{4-p}$, also nur $p = 3$, $f = 8$ möglich.

$d = 5$: Dann $f = \frac{20}{10-3p}$, also nur $p = 3$, $f = 20$ möglich.

Für $d \geq 6$ ist $2p + 2d - pd = 2p - (p-2)d \leq 2p - 6(p-2) = 12 - 4p \leq 0$. Dies liefert kein positives $f \in \mathbb{N}$. Damit haben wir alle Platonischen Körper gefunden:

	n	m	f	d	p
Tetraeder	4	6	4	3	3
Oktaeder	6	12	8	4	3
Würfel	8	12	6	3	4
Ikosaeder	12	30	20	5	3
Dodekaeder	20	30	12	3	5

4.3 Färbbarkeit ebener Graphen

Ich halte mich in diesem Abschnitt an das interessante Buch von Aigner über Graphentheorie, der die Entwicklung dieses Gebietes aus dem 4-Farben Problem schildert. Beim 4-Farben Problem geht es bekanntlich darum, die Flächen eines ebenen Graphen mit insgesamt 4 Farben so zu färben, dass je zwei über Kanten berührende Flächen unterschiedliche Farben haben.

Der erste, der behauptete, einen Beweis für das 4-Farben Problem gefunden zu haben, war ein gewisser A. Kempe[1] im Jahr 1879. Seine „Lösung" wurde mit Begeisterung aufgenommen, und er wurde sofort zum Fellow of the Royal Society gewählt. Erst 10 Jahre später zeigte Heawood einen Fehler auf. Trotzdem beinhaltet Kempe's Versuch gute Ideen, die z.B. beim Beweis des 5-Farben Satzes benutzt werden können.

Definition 4.6 *Ein ebener Graph mit den Flächen $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_f\}$ heißt* **q-*färbbar***, *wenn es eine Abbildung $\varphi : \mathcal{F} \to \{1, \ldots, q\}$ gibt mit $\varphi(F) \neq \varphi(F')$ für alle Flächen F und F', die eine gemeinsame Randkante besitzen. Für „Flächen" sagen wir im folgende auch „Länder".*

Ganz entscheidend ist der folgende Satz:

Satz 4.7 *Sei G ein ebener Graph mit Eckengrad $d(e) \geq 3$ für alle Ecken e. Dann gibt es wenigstens eine Fläche mit höchstens 5 Randkanten.*

[1]Rechtanwalt und Mitglied der Londoner Mathematischen Gesellschaft.

Beweis: Sei f_i, $i = 1, 2, \ldots$, die Anzahl der Flächen mit i Randkanten. Ist f die Gesamtzahl, so ist natürlich $f = \sum\limits_i f_i$. Jede Kante von G begrenzt eine oder zwei Flächen. Ist m die Zahl der Kanten, so folgt daraus $\sum\limits_i i f_i \leq 2m$ (abzählen!). Aus Satz 2.1 folgt wegen $d(e) \geq 3$ für alle Ecken: $3n \leq \sum\limits_e d(e) = 2m$. Multiplikation der Eulersche Polyederformel mit 6 liefert

$$\begin{aligned} 6(1+q) &= 6n + 6f - 6m = \underbrace{(6n - 4m)}_{\leq 0} + (6f - 2m) \leq 6f - 2m \\ &\leq 6f - \sum_i i f_i = \sum_{i \geq 1} (6-i) f_i \,, \end{aligned}$$

also

$$0 < 6(1+q) \leq \sum_{i \geq 1} (6-i) f_i \,.$$

Wegen $6 - i \leq 0$ für $i \geq 6$ muss mindestens eines der f_1, f_2, f_3, f_4 oder f_5 positiv sein. $\square$

Bemerkungen: (a) Die Voraussetzung $d(e) \geq 3$ für alle e ist natürlich notwendig, denn sonst könnte man durch Unterteilung des Randes einer Fläche die Zahl der Randkanten beliebig erhöhen.

(b) Die Aussage dieses Satzes entspricht genau der von Satz 4.3, dass jeder planare Graph ohne doppelte Kanten eine Ecke mit Grad ≤ 5 besitzt. Durch „Dualisierung“ gehen beide Aussagen ineinander über. Der duale Graph G' zu einem ebenen Graph G ist folgendermaßen erklärt: Die Ecken von G' bestehen aus den Flächen von G, und zwei Ecken von G' sind durch eine Kante verbunden, wenn die entsprechenden Flächen eine gemeinsame Randkante besitzen.

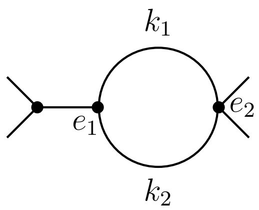
Die Aussage des letzten Satzes ist scharf, denn das Dodekaeder hat 12 Flächen, bestehend nur aus Fünfecken. Auf Seite 23 ist seine Projektion in der Ebene gezeichnet. Durch Dualisierung gewinnen wir also auch ein Beispiel dafür, dass der Satz 4.3 scharf ist.

Wir wollen jetzt Kempe's Beweisgang nachvollziehen. Er verläuft durch vollständige Induktion über f. Wir versuchen es zunächst mit 4 Farben. Die Fälle $f \leq 4$ sind trivial, 4 Farben reichen für 4 Flächen natürlich aus.

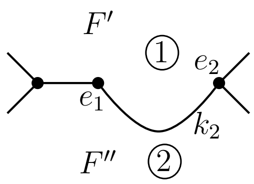
Wir setzen also jetzt voraus, jeder ebene Graph mit höchstens $f - 1$ Flächen sei färbbar (mit 4 Farben), und es sei G ein ebener Graph mit f Flächen. Zunächst zeigen wir, dass wir ohne Beschränkung $d(e) \geq 3$ für alle Ecken e voraussetzen können: Wir betrachten dafür zunächst $G_0 = G - \{e : d(e) = 0\}$, d.h. wir entfernen von G alle isolierten Punkte. Haben wir G_0 gefärbt, so auch G. Jetzt betrachten wir nacheinander den Graphen $G_{\ell+1}$ ($\ell = 0, 1, \ldots$), der aus G_ℓ entsteht, indem wir eine Ecke mit Grad 1 entfernen und die daran anstoßende Kante. Haben wir G_ℓ gefärbt, so auch $G_{\ell+1}$, denn die an e_ℓ hängende Kante begrenzt ja nur eine Fläche. Der Iterationsprozess stoppt irgendwann mit einem Graphen G' mit $d(e) \geq 2$ für alle Ecken e. Eine Ecke e von G' mit $d(e) = 2$ können wir eliminieren, indem wir die beiden an e anstoßenden Kanten k_1 und k_2 verschmelzen – falls die anderen Endpunkte von k_1 und k_2 verschieden sind. Sind diese Endpunkte gleich und nennen wir diesen $\tilde{e}$, so sind e und $\tilde{e}$ durch eine Doppelkante verbunden und diese „ragt“ bei e in eine Fläche F hinein. Haben wir den Rest gefärbt, so können wir das Innere dieser Schleife mit einer Farbe, der verschieden von der von F ist, färben. Man skizziere diese Fälle!

Jetzt können wir Satz 4.7 anwenden. Daher gibt es eine Fläche F mit höchstens 5 Randkanten. Wir untersuchen jetzt die Fälle für 2, 3, 4 und 5 Randkanten getrennt.

1. Fall: F habe genau zwei Randkanten k_1 und k_2. Dann gibt es auch zwei Randecken e_1 und e_2. Wir bilden jetzt $G - k_1$. Dieser neue Graph G' hat $f - 1$ Flächen und ist daher färbbar. Die Kante k_1 liegt in einer Fläche F' mit Farbe 1. Die Kante k_2 stößt außer an F' nur noch an eine weitere Fläche F'' an mit Farbe 2. Färbe jetzt F mit einer Farbe verschieden von 1 und 2.

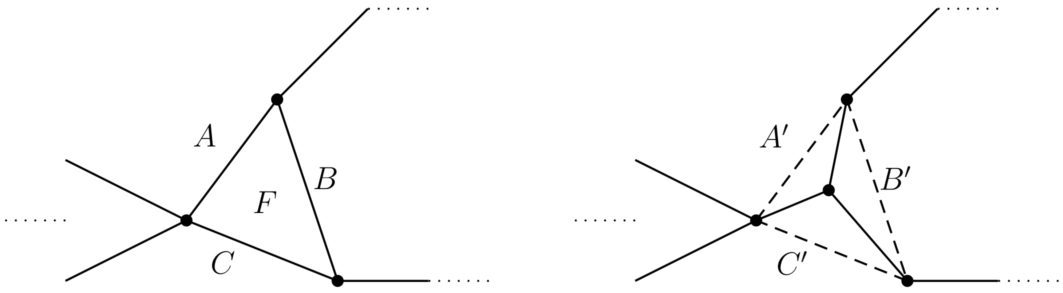


Graph G



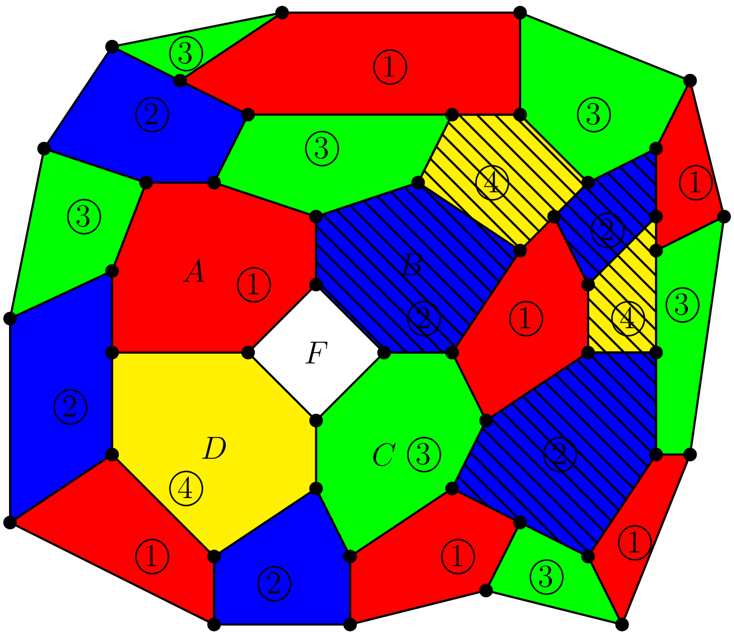
Graph G'

2. Fall: F habe genau drei Randkanten k_1, k_2, k_3 mit den angrenzenden Flächen A, B, C (siehe Bild). Wir benutzen jetzt eine auf Kempe zurückgehende Idee, die wir im folgenden „Kontraktion“ nennen, und erzeugen einen Graphen mit $f-1$ Flächen auf folgende Weise: Zunächst fügen wir in F eine Ecke e ein und verbinden e mit den drei Ecken von F. Dann streichen wir die Randkanten zu A, B, C und schlagen damit F zu die Flächen A, B, C hinzu. Diese werden mit A', B', C' bezeichnet. Der so konstruierte Graph G' ist nach Induktionsvorauusetzung färbbar. Die drei ursprünglichen Randkanten von F liegen in den Ländern A', B', C', die mit drei verschiedenen Farben gefärbt sind. Gehen wir wieder zurück zu G, so ist also eine Farbe für F noch übrig.



Graph G Graph G'

3. Fall: F habe genau vier Randkanten mit angrenzenden Flächen A, B, C, D. Wieder kontrahieren wir und färben die Kontraktion G' mit den Farben $1, 2, 3, 4$. Benötigen wir für die 4 Flächen nur drei Farben, so sind wir fertig, denn die 4. Farbe kann für F benutzt werden. Wir nehmen also an, alle 4 Farben $1, \ldots, 4$ werden für die Färbung von A, B, C, D benötigt, und sie seien in dieser Reihenfolge gefärbt. Im Bild sind die Farben $1, 2, 3, 4$ durch rot, blau, grün, gelb repräsentiert.



Wir betrachten jetzt Ketten von aneinanderstoßenden Flächen. Es kann nicht sowohl eine solche Kette von A nach C, die abwechselnd mit rot und grün gefärbt ist, geben als auch eine von B nach D, die abwechselnd mit blau und gelb gefärbt ist. Denn solche Ketten müssten sich schneiden, also eine gemeinsame Fläche haben, was natürlich nicht geht. Ohne Einschränkung nehmen wir an, es gebe keine blau-gelb-Kette von B nach D.

Betrachte jetzt die Menge $\mathcal{F}$ aller Flächen, die von B aus durch blau-gelb-Ketten erreichbar sind. Im Plot sind sie gestrichelt gezeichnet. Die Flächen A, C und D gehören jedenfalls nicht dazu. In diesen Flächen von $\mathcal{F}$ vertauschen wir jetzt die Farben blau und gelb. Dann erhalten wir eine neue zulässige Färbung, denn: Jede Fläche $F' \in \mathcal{F}$ ist blau oder gelb. Sei F'' eine Nachbarfläche. Ist sie rot oder blau gefärbt, so beeinflusst das Vertauschen von blau und gelb die Zulässigkeit nicht. Ist sie gelb (falls F' blau) bzw. blau (falls F' gelb), so ist auch $F'' \in \mathcal{F}$ und ihre Farbe wird ebenfalls vertauscht. Daher erhalten wir eine zulässige Färbung, bei der jetzt B die Farbe gelb erhält. Es bleibt also die Farbe blau übrig, mit der wir F färben können.

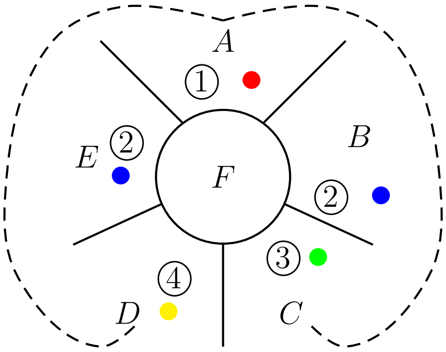
Solche Ketten heißen **Kempe-Ketten** und wurden von ihm auch für den Fall benutzt, dass es Flächen mit 5 Randkanten gibt. Seine Argumenation enthielt aber einen Fehler (siehe unten). Allerdings können wir zeigen:

Satz 4.8 *(5 Farbensatz, Heawood 1890)*

Jeder ebene Graph kann mit 5 Farben gefärbt werden.

Beweis: Wir führen den selben Induktionsschluss durch wie oben, nur für 5 statt für 4 Farben. Wir brauchen jetzt nur noch den $4-$ten Fall betrachten, dass nämlich eine Fläche F mit 5 Randkanten und angrenzenden Flächen A, B, C, D, E existiert. Das Kontraktionsargument liefert die Färbbarkeit aller Flächen ohne F mit 5 Farben. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass die Nachbarflächen A, B, C, D, E mit den Farben rot, blau, grün, gelb und schwarz (in dieser Reihenfolge) belegt sind. Existiert nun keine rot-grün-Kette von A nach C, so kann durch Vertauschung der Farben rot und grün eine Farbe eingespart werden. Falls es aber eine rot-grün-Kette von A nach C gibt, so kann es sicher keine blau-gelb-Kette von B nach D geben, und man kann hier eine Farbe einsparen, die für F verwendet werden kann. Damit ist der Satz bewiesen. □

Wir wollen zum Schluss dieses Kapitels noch auf Kempe's Argument für den $4-$Farbensatz eingehen. Seien jetzt also wie beim Beweis des Satzes 4.8 die Fläche F von den Flächen A, B, C, D und E begrenzt und alle 4 verfügbaren Farben seien benötigt, um sie zu färben. Bei uns seien es rot, blau, grün und gelb (in dieser Reihenfolge). Durch Umfärbung können wir die folgende Situation erreichen:



Falls keine rot-grün-Kette von A nach C existiert, so können wir wie oben eine Farbe einsparen genau wie in dem Fall, dass keine rot-gelb-Kette von A nach D existiert. Wir nehmen jetzt also an, dass sowohl eine rot-grün-Kette von A nach C existiert als auch eine rot-gelb-Kette von A nach D. Dann ist B von D getrennt und E von C. Dies bedeutet, dass die Klasse $\mathcal{F}_{B-bl-ge} = \{F' : \text{es gibt blau-gelb-Kette von } B \text{ nach } F'\}$ nicht auch D oder E enthalten kann. Genauso enthält die Klasse $\mathcal{F}_{E-bl-gr} = \{F' : \text{es gibt blau-grün-Kette von } E \text{ nach } F'\}$ weder B noch C. Vertausche also in $\mathcal{F}_{B-bl-ge}$ die Farben blau und gelb und in $\mathcal{F}_{E-bl-gr}$ die Farben blau und grün. Dann hat A die Farbe rot, B und D die Farbe gelb, C und E die Farbe grün. Es bleibt die Farbe blau für F übrig.

Worin liegt der Fehler? (siehe Beispiel auf der nächsten Seite)

//// außen