

Elemente der Graphentheorie

Schnupperkurs Sommersemester 2015

Prof. Dr. Andreas Kirsch
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

5. Mai 2015

Literaturliste über Graphentheorie (nur deutsch)

- M. Aigner: Graphentheorie. Teubner Studienbuch, 1984.
- G. Biess: Graphentheorie. Verlag Harri Deutsch, 1979.
- R. Bodendiek, R. Lang: Lehrbuch der Graphentheorie, Band 1. Spektrum Akad. Verlag, 1995.
- J. Clark, D.A. Holton: Graphentheorie. Spektrum Akad. Verlag, 1994.
- R. Diestel: Graphentheorie. Springer, 2000.
- W. Dörfler, J. Mühlbacher: Graphentheorie für Informatiker. Sammlung Göschel, de Gruyter Verlag 1973.
- F. Harary: Graphentheorie. Oldenbourg Verlag, 1974.
- G. Nägler, F. Stopp: Graphen und Anwendungen. Teubner Verlagsgesellschaft, 1996.
- K. Neumann: Operations Research Verfahren Bd. III (Graphentheorie, Netzplantechnik). Karl Hauser Verlag, 1975.
- H. Noltemeier: Graphentheorie. deGruyter Lehrbuch, 1976.
- L. Volkmann: Graphen und Digraphen. Springer Verlag Wien, New York, 1991.
- R.J. Wilson: Einführung in die Graphentheorie. Vandenhoeck & Ruprecht, 1972.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Eulersche Wege	8
3	Graphen und Matrizen	15

1 Einführung

In dieser Schnuppervorlesung werden wir nicht nur Elemente der Graphentheorie besprechen, sondern auch typische Vorgehensweisen der „höheren“ Mathematik kennenlernen. Dabei kommen streng mathematisch formulierte Definitionen und Sätze vor, Bezeichnungen und das Führen von Beweisen.

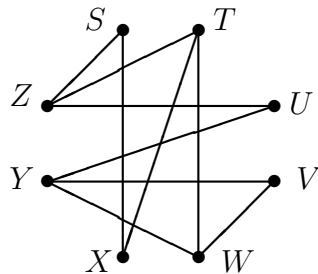
Wir beginnen zunächst mit einigen Beispielen für Graphen.

Beispiele 1.1

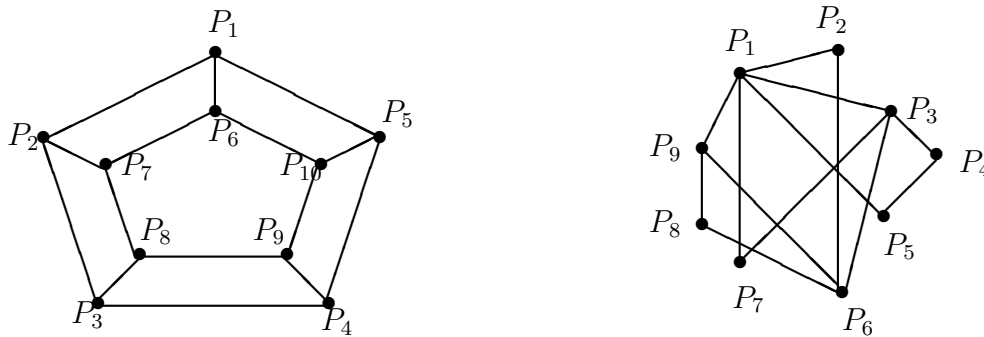
(a) In einer Hockeyliga gibt es acht Mannschaften, die wir mit S, T, U, V, W, X, Y und Z bezeichnen. Nach einigen Wochen der Saison haben die folgenden Spiele stattgefunden:

- S hat gegen X und Z gespielt,
- T hat gegen W, X und Z gespielt,
- U hat gegen Y und Z gespielt,
- V hat gegen W und Y gespielt,
- W hat gegen T, V und Y gespielt,
- X hat gegen S und T gespielt,
- Y hat gegen U, V und W gespielt und
- Z hat gegen S, T und U gespielt.

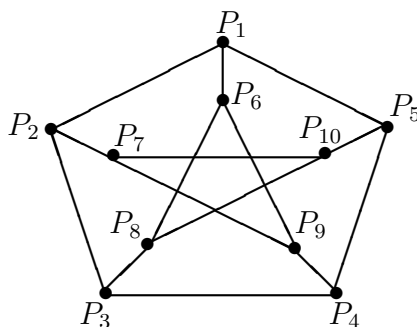
Wir können diese Situation durch das folgende Diagramm veranschaulichen, wobei die Mannschaften durch (große) Punkte dargestellt werden und zwei solcher Punkte durch eine Linie verbunden sind, wenn die zugehörigen Mannschaften gegeneinander gespielt haben.



(b) Es seien n Gäste zu einem Festessen eingeladen. Der Gastgeber möchte vermeiden, dass Gäste nebeneinander sitzen, die sich nicht mögen. (Wir stellen uns dies an einem runden Tisch vor.)

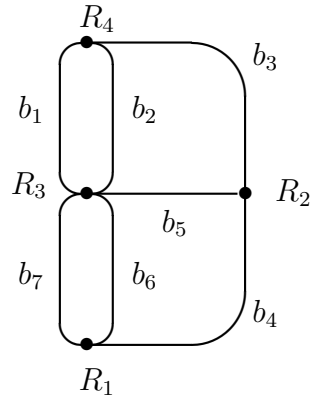
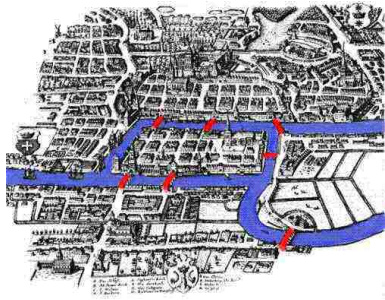


Hier werden zwei Personen genau dann verbunden, wenn es keine Bedenken gibt, sie nebeneinander zu setzen. Die Ausgangsfrage ist äquivalent zur Frage, ob es einen geschlossenen Kantenzug in diesem Graphen gibt, der alle Personen genau einmal „durchläuft“. Versuchen Sie es bei den obigen Beispielen! (Links geht's, rechts nicht!) Solche Kantenzüge heißen **geschlossene Hamiltonsche Wege**. Beim folgenden sogenannten **Petersen-Graphen** gibt es auch keinen geschlossenen Hamiltonschen Weg wie wir noch sehen werden.



(c) Das folgende Beispiel des **Königsberger Brückenproblems** wird allgemein als der Ursprung der Graphentheorie angesehen. Leonard Euler veröffentlichte 1736 eine Arbeit, die dieses alte Problem löste:

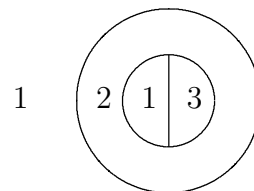
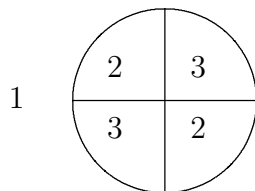
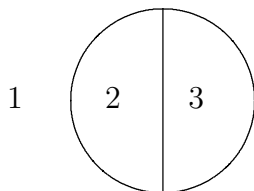
Die Stadt Königsberg in Ostpreußen wird von dem Fluss Pregel durchflossen, verzweigt und bildet eine Insel (den Kneiphof). Im folgenden Bild sehen Sie links einen alten Stadtplan von Königsberg mit sieben Brücken. Es war nun die Frage, ob es möglich ist, einen Weg durch Königsberg zu finden, der jede Brücke genau einmal überquert. Rechts ist die Situation in einen Graphen übersetzt worden. Die vier „Stadtgebiete“ R_1, R_2, R_3, R_4 werden durch Ecken eines Graphen repräsentiert, die sieben Brücken b_1, \dots, b_7 durch verbindende Kanten:



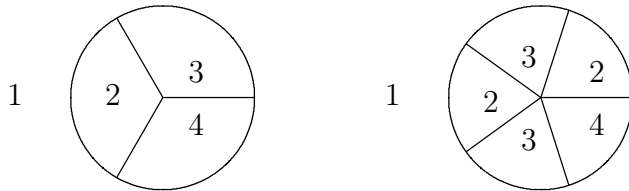
Wir können uns schnell überlegen, dass so ein Weg nicht möglich ist: Angenommen, es gäbe einen solchen Weg. Betrachten wir dann z.B. das Gebiet R_1 . Es ist über 3 Brücken mit den anderen Gebieten verbunden. Da alle Brücken genau einmal durchlaufen werden, muss R_1 Start- oder Endpunkt des Weges sein! Genau das gleiche Argument gilt für alle anderen Gebiete, und offenbar können nicht alle Start- oder Zielpunkt sein. Daher gibt es keinen solchen Weg.

Bezogen auf den Graphen stellt sich hier also die Frage, ob es einen Weg gibt, der irgendwo beginnt und jede Kante dieses Graphen genau einmal durchläuft. Graphen, bei denen dies möglich ist heißen **Eulersche Graphen**. Mit diesen werden wir uns im nächsten Abschnitt näher beschäftigen.

(d) Bei einem **Färbungsproblem** ist eine „Landkarte“ gegeben und es wird nach der minimalen Anzahl der Farben gefragt, mit denen man die Länder färben kann, so dass aneinanderstoßende Länder unterschiedliche Farben haben müssen. „Aneinanderstoßend“ bedeutet hier, dass sie eine echte Grenze (nicht nur einen Grenzpunkt) gemeinsam haben müssen. Bei den folgende drei Beispielen reichen 3 Farben (numeriert mit 1, 2 und 3):

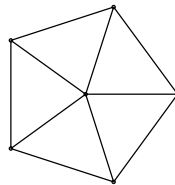


Bei den folgenden reichen 3 nicht, aber vier:



Wie können wir diesen Landkarten einen Graphen zuordnen, und wie sieht das Färbungsproblem dort aus?

Jedes Land entspricht einer Ecke des Graphen, und zwei Ecken des Graphen sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sie eine gemeinsame Grenze haben. Dem letzten Beispiel entspricht der Graph



(Man überlege sich selbst, welche Ecken hier welchem Land entsprechen.) Das Färbungsproblem geht also über in das Problem, mit möglichst wenig Farben die Ecken so zu färben, dass aneinanderstoßende Ecken ungleiche Farbe haben.

Wenn man jemandem z.B. am Telefon einen Graphen schildern möchte, ist die graphische Form ungeeignet. Auch im Rechner benötigt man die Darstellung eines Graphen in geeigneter Form. Wir brauchen eine streng **mathematische Definition**. Bevor wir dies tun, wiederholen wir einige elementare Begriffe der Mengenlehre:

Eine **Menge** kann **explizit** durch auflisten ihrer **Elemente** oder durch eine charakterisierende **Beschreibung** angegeben werden, z.B. $M = \{\triangle, \square, \circ\}$ oder $M = \{A : A \text{ Dreieck}\}$. Eine besondere Menge ist die sogenannte **leere Menge**, die kein einziges Element hat. Sie wird mit \emptyset bezeichnet.

Schreibweise: Wir schreiben $x \in M$, wenn x ein Element aus M ist, anderenfalls $x \notin M$.

Als Beispiele können wir die folgenden Zahlbereiche nennen:

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \dots\} = \{n : n \text{ natürliche Zahl}\} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} = \{n : n \text{ ganze Zahl}\} \\ \mathbb{Q} &= \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\} = \{x : x \text{ rationale Zahl}\} \\ \mathbb{R} &= \{x : x \text{ reelle Zahl}\}\end{aligned}$$

Beziehungen zwischen Mengen:

Zwei Mengen A und B heißen gleich, wenn sie dieselben Elemente haben.

Eine Menge A heißt **Teilmenge** von einer Menge B , wenn jedes Element von A in B liegt, in Zeichen: $A \subset B$ oder $B \supset A$. Hier lassen wir ausdrücklich $A = B$ zu, also ist $A \subset A$.

Durchschnitt, Vereinigung und (Mengen-)Differenz sind erklärt durch

$$\begin{aligned}A \cap B &= \{x : x \in A \text{ und } x \in B\} && \text{Durchschnitt von } A \text{ und } B \\ A \cup B &= \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\} && \text{Vereinigung von } A \text{ und } B \\ A \setminus B &= \{x \in A : x \notin B\} && \text{Differenz oder Restmenge}\end{aligned}$$

und erfüllen unter anderem folgende Eigenschaften.

$$\begin{aligned}A \cap \emptyset &= \emptyset \quad A \cup \emptyset = A, \\ A \cap B &= B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A \quad (\text{Kommutativgesetze}), \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (\text{Assoziativgesetze}), \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (\text{Distributivgesetze}).\end{aligned}$$

Ist eine (nichtleere) Menge A gegeben, so kann man damit die Menge aller Teilmengen betrachten. Diese Menge wird **Potenzmenge** genannt und mit $\mathcal{P}(A)$ bezeichnet, also

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subset A\}.$$

Ist etwa $A = \{1, 2, a\}$, so ist

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{a\}, \{1, 2\}, \{1, a\}, \{2, a\}, A\}.$$

Wir benötigen die Teilmenge $\mathcal{P}_2(A)$ aller zwei-elementigen Teilmengen von A , im Beispiel:

$$\mathcal{P}_2(A) = \{\{1, 2\}, \{1, a\}, \{2, a\}\}.$$

Zur exakten mathematischen Definition brauchen wir noch den Funktionsvorschrift:

Seien D und W Mengen. Eine Funktion (oder Abbildung) ist eine Vorschrift, die jedem $x \in D$ genau ein $y \in W$ zuordnet. Wir schreiben $f : D \rightarrow W$ und $y = f(x)$. Die Menge D heißt **Definitionsmenge** von f . Die Menge W **Wertemenge** von f . Wir schreiben

$$\begin{aligned}f : D &\longrightarrow W \\ x &\longmapsto f(x)\end{aligned}$$

Die Menge

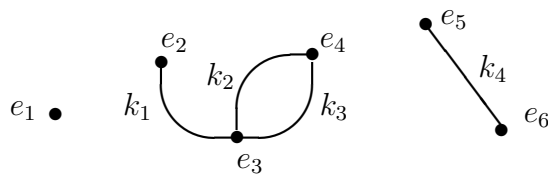
$$f(D) = \{f(x) \in W : x \in D\}$$

heißt Bild von D unter f .

Definition 1.2 Ein Graph besteht aus einer endlichen **Eckenmenge** E und einer endlichen **Kantenmenge** K , sowie einer Angabe, welche zwei Ecken $\{\hat{e}, \tilde{e}\}$ zur Kante $k \in K$ gehören. (Wobei $\hat{e} \neq \tilde{e}$ gefordert wird. Wir lassen also keine Schleifen zu.) Mathematisch befriedigender formuliert bedeutet dies, dass es eine Abbildung $\Psi : K \rightarrow \mathcal{P}_2(E)$ von K in die Menge aller zweielementigen Teilmengen von E geben muss. Wir benutzen also das Symbol $\mathcal{P}_2(E)$ für die Menge aller Teilmengen von E , die aus genau 2 Elementen besteht. Durch die Abbildung Ψ wird also jeder Kante die Menge der beiden Endpunkte zugeordnet – die verschieden sein müssen!

Beispiel 1.3

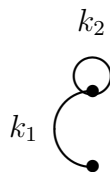
(a) Ein Graph kann etwa so aussehen:



Hier ist
$$E = \{e_1, \dots, e_6\}, \quad K = \{k_1, \dots, k_4\}$$

mit der Zuordnung $\Psi : k_1 \rightarrow \{e_2, e_3\}, k_2 \rightarrow \{e_3, e_4\}, k_3 \rightarrow \{e_3, e_4\}, k_4 \rightarrow \{e_5, e_6\}$.

(b) Das folgende Bild stellt keinen Graph in unserem Sinne dar, da k_2 nur einen Endpunkt besitzt.



2 Eulersche Wege

Definitionen und Bezeichnungen

Ein **Weg** ist eine Sequenz $W = (e_1 k_1 e_2 k_2 \dots e_n k_n e_{n+1})$, wobei wir abwechselnd Ecken und Kanten nebeneinander schreiben (beginnend und endend mit je einer Ecke), wobei wir darauf achten müssen, dass alle Kanten verschieden sind – nicht aber die Ecken! Mit der Abbildung Ψ können wir das so ausdrücken:

1. $\psi(k_j) = \{e_j, e_{j+1}\}$ für alle $j = 1, \dots, n$, und
2. $k_i \neq k_j$ für alle $i \neq j \Rightarrow$.

Die Anzahl n der Kanten wird **Länge** des Weges genannt. Die Ecken e_1 und e_{n+1} heißen **Endpunkte** von W .

Der Graph heißt **zusammenhängend**, wenn es zu jedem Paar $\hat{e}, \tilde{e} \in E$ einen Weg $W = (e_1 k_1 \dots e_n k_n e_{n+1})$ gibt mit $e_1 = \hat{e}$ und $e_{n+1} = \tilde{e}$.

Der Weg heißt **geschlossen** (oder Kreis oder Zyklus), wenn $e_1 = e_{n+1}$, andernfalls offen.

Ein (offener bzw. geschlossener) Weg $W = (e_1 k_1 \dots k_n e_{n+1})$ heißt ein (offener bzw. geschlossener) **Eulerscher Weg**, wenn unter den k_1, \dots, k_n alle Kanten aus K vorkommen, d.h. wenn $K = \{k_1, \dots, k_n\}$. Der Graph heißt **Eulerscher Graph**, wenn es überhaupt einen geschlossenen Eulerschen Weg gibt.

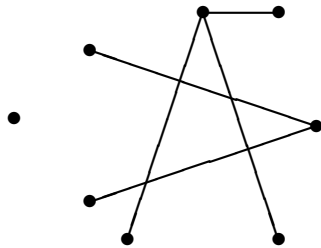
Ein Weg $(e_1 k_1 \dots k_n e_{n+1})$ heißt ein **Hamiltonscher Weg**, wenn

- (i) alle e_i verschieden sind (bis auf eventuell $e_1 = e_{n+1}$) und
- (ii) $E = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$, d.h. wenn unter den e_i alle Ecken des Graphen (genau einmal) vorkommen.

Der **Grad** einer Ecke ist die Anzahl der anstoßenden Kanten. Wir schreiben hierfür $d(e)$ (d für „degree“).

Zu jeder Ecke e können wir dann die Menge $\mathcal{Z}(e)$ der Ecken betrachten, die mit e durch einen Weg verbunden sind. Diese Eckenmenge heißt die zu e gehörige **Zusammenhangskomponente** oder auch **Erreichbarkeitsmenge**.

Offensichtlich zerfällt die Eckenmenge E in eine endliche Anzahl von Zusammenhangskomponenten. Der folgende Graph besteht aus drei Komponenten.



Ein Unterschied der Mathematik zu den Naturwissenschaften oder gar Geisteswissenschaften ist, dass wir hier, ausgehend von den präzisen Definitionen, Aussagen **beweisen** können. Wir wissen dann 100prozentig, dass eine Aussage richtig ist – vorausgesetzt natürlich, dass wir die Schlussfolgerungen der Logik akzeptieren. Wir wollen dafür einige Beispiele bringen:

Satz 2.1 Für jeden Graphen G mit n Eckenmenge $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ und m Kanten gilt:

$$\sum_{i=1}^n d(e_i) = 2m.$$

Hier haben wir das in der Mathematik und allen Natur- und Ingenieurwissenschaften benutzte Summensymbol \sum benutzt. Haben wir Zahlen (oder andere Größen, die durchnummeriert werden), wie etwa x_1, x_2, \dots, x_{20} , so schreiben wir

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_{20}.$$

Der „Summationsindex“ i in $\sum_{i=1}^{20}$ beginnt also bei 1 und wird hochgezählt bis 20. (Er kann auch ein anderer Buchstabe als i sein, oft j, k oder n .) Damit ist also $\sum_{i=1}^n d(e_i)$ eine Kurzform von $d(e_1) + d(e_2) + \dots + d(e_n)$.

Beweis: Jede Kante berührt zwei Ecken, wird also beim Zählen der Grade sowohl bei dem einen wie auch bei dem anderen Eckpunkt mitgezählt.

Etwas genauer könnte man so diskutieren: In Gedanken belegen wir jede Kante mit einer Richtung (so etwas heißt gerichteter Graph). Dann hat jede Kante genau einen Anfangspunkt und genau einen Endpunkt. $d_-(e)$ sei die Anzahl der aus der Ecke e „hinauslaufenden“ Kanten, $d_+(e)$ die der in e „hineinlaufenden“ Kanten. Natürlich ist $d(e) = d_-(e) + d_+(e)$. Außerdem ist $\sum_{i=1}^n d_-(e_i)$ als Summe aller aus allen Ecken hinauslaufenden Kanten genau die Anzahl m aller Kanten. (Jede Kante muss irgendwo hinauslaufen und kann auch nicht aus mehr als einer Ecke hinauslaufen.) Daher ist $\sum_{i=1}^n d_-(e_i) = m$. Genauso ist $\sum_{i=1}^n d_+(e_i) = m$ und $\sum_{i=1}^n d(e_i) = \sum_{i=1}^n d_-(e_i) + \sum_{i=1}^n d_+(e_i) = 2m$. \square

Folgerung:

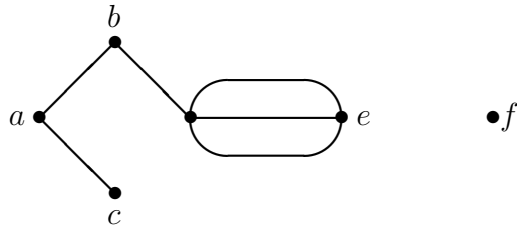
In jedem Graphen gibt es eine gerade Anzahl von Ecken mit ungeradem Grad.

Beweis: Aus dem Satz 2.1 erkennen wir, dass $\sum_{i=1}^n d(e_i)$ eine gerade Zahl ist, nämlich $2m$. Nummerieren wir jetzt die Ecken so, dass e_1, \dots, e_p die Ecken mit ungeradem Grad und e_{p+1}, \dots, e_n die mit geradem Grad sind, so ist

$$\sum_{i=1}^p d(e_i) = 2m - \sum_{i=p+1}^n d(e_i),$$

als Differenz zweier gerader Zahlen ebenfalls gerade. Links steht eine Summe von **ungeraden Zahlen**. Da diese Summe eine **gerade** Zahl ergibt, muss die Anzahl p der Summanden gerade sein! \square

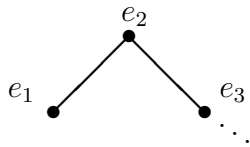
Übung Ermittle die Grade in folgendem Graphen und überprüfe die Aussagen des Satzes 2.1 und der Folgerung.



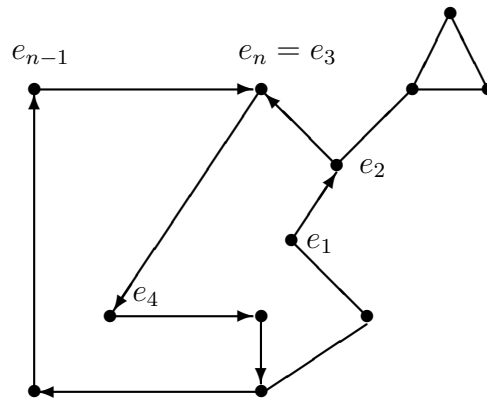
Der folgende Satz wird beim Hauptsatz über Eulersche Graphen eine entscheidende Rolle spielen.

Satz 2.2 *Es sei G ein Graph, in dem Grad jeder Ecke mindestens zwei beträgt. Dann enthält G einen Zyklus (d.h. einen geschlossenen Weg).*

Beweis: Sei e_1 eine beliebige Ecke. Wegen $d(e_1) \geq 2$ gibt es eine angrenzende Kante, deren anderes Ende wir mit e_2 bezeichnen.



Wegen $d(e_2) \geq 2$ gibt es eine weitere angrenzende Kante, deren anderes Ende wir mit e_3 bezeichnen. So machen wir immer weiter, bis wir (zum ersten Mal) einen Knoten e_n treffen, der schon einmal dran war. Dies muss irgendwann einmal passieren, da wir ja nur endlich viele Knoten haben.



Dann ist also $e_n = e_j$ mit $n > j$, und die gewählten Kanten mit Ecken $e_j, e_{j+1}, \dots, e_{n-1}, e_j$ bilden einen Zyklus. \square

Bevor wir den Hauptsatz über Eulersche Graphen beweisen, möchte ich kurz auf das **Beweisprinzip der vollständigen Induktion** eingehen. Dies wird angewandt, wenn eine Aussage $\mathcal{A}(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, 3, \dots$ bewiesen werden soll. Das Verfahren besteht aus zwei Teilen:

1. **Schritt (Induktionsanfang):** Zeige die Aussage für $n = 1$. Beweise also $\mathcal{A}(1)$. Dies ist i.a. einfach.
2. **Schritt (Induktionsschritt):** Nehme an, die Aussage $\mathcal{A}(n)$ sei für ein (beliebiges) $m \geq 1$ schon bewiesen (Induktionsvoraussetzung). Beweise unter dieser Annahme die Aussage $\mathcal{A}(m + 1)$, also für die nächste natürliche Zahl.

Dann gilt die Behauptung für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

Beispiel 2.3 Wir zeigen die Formel

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N},$$

mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann steht links 1 und rechts $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Also ist die Behauptung richtig für $n = 1$.

Induktionsschluß: Sei die Behauptung richtig für ein $m \geq 1$. Unter dieser Voraussetzung zeigen wir die Behauptung für $m + 1$: Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m+1} j &= \sum_{j=1}^m j + (m+1) = \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) \\ &= \frac{m(m+1) + 2(m+1)}{2} = \frac{(m+2)(m+1)}{2}. \end{aligned}$$

Dies ist die behauptete Formel für $m + 1$ statt m . Nach dem Induktionsprinzip gilt die Behauptung jetzt für alle $n = 1, 2, 3, \dots$

Beispiel 2.4 (*Bernoullische Ungleichung*)

Für jedes $h > -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(1+h)^n \geq 1 + nh$.

Beweis durch vollständige Induktion nach n :

Für $n = 1$ ist die Behauptung sicher richtig, es gilt sogar Gleichheit.

Sei die Behauptung jetzt für ein $m \geq 1$ richtig. Dann ist unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung:

$$(1+h)^{m+1} = (1+h)^m (1+h) \geq (1+mh)(1+h) = 1 + mh + h + \underbrace{mh^2}_{\geq 0} \geq 1 + (m+1)h.$$

Damit ist die Behauptung auch für $m + 1$ gezeigt. Nach dem Induktionsprinzip gilt die Behauptung jetzt für alle $n = 1, 2, 3, \dots$ (Wo wird die Voraussetzung $h > -1$ benötigt?)
 \square

Als drittes Beispiel beweisen wir Satz 2.1 noch einmal mit vollständiger Induktion nach der Anzahl m der Kanten:

$m = 1$: Es gibt eine Kante, und dies hat zwei Endpunkte. Daneben kann der Graph noch weitere Ecken enthalten, an denen keine Kanten anstoßen (isolierte Ecken). Da bei denen der Grad Null ist, werden sie nicht mitgezählt. Wir erhalten also $\sum_{j=1}^n d(e_j) = 2 = 2m$.

Sei der Satz jetzt für jeden Graphen mit m Kanten richtig, und sei G jetzt ein Graph mit $m + 1$ Kanten. Wir entfernen jetzt irgendeine Kante von G . Dann erhalten wir einen neuen Graphen G' mit der selben Eckenmenge und m Kanten. Für diesen gilt die Formel nach Induktionsvoraussetzung, also

$$\sum_{j=1}^n d'(e_j) = 2m,$$

wobei $d'(e_j)$ der Eckengrad von e_j in G' ist. Fügen wir die herausgenommene Kante wieder ein, so erhöhen wir für genau zwei Ecken den Grad um 1, daher gilt

$$\sum_{j=1}^n d(e_j) = 2m + 2 = 2(m + 1),$$

und die Behauptung ist für G bewiesen.

Jetzt können wir zeigen:

Satz 2.5 (Hauptsatz über Eulersche Wege)

Sei G ein zusammenhängender Graph. G ist genau dann Eulersch, besitzt also einen geschlossenen Eulerschen Weg, wenn der Grad jedes Knotens gerade ist.

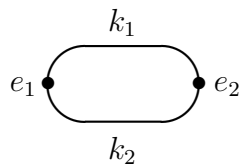
Beweis: Der Satz beinhaltet zwei Aussagen, die durch „genau dann“ beschrieben werden. Zuerst zeigen wir: Falls es einen geschlossenen Eulerschen Weg gibt, so ist jeder Grad gerade. Danach zeigen wir die Umkehrung, die schwieriger zu beweisen ist: Wenn jeder Grad gerade ist, so gibt es einen geschlossenen Eulerschen Weg.

Sei also zunächst $W = (e_1 k_1 \dots e_m k_m e_{n+1})$ ein geschlossener Eulerscher Weg, der bei e_1 beginnt und endet, also $e_{m+1} = e_1$. Die Ecken $\{e_1, \dots, e_m\}$ müssen nicht alle verschieden sein. Sei e eine beliebige Ecke des Graphen. Da G zusammenhängend ist, so hängt an e mindestens eine Kante, und diese kommt unter den $\{k_1, \dots, k_m\}$ vor (Eulerscher Weg!). Also kommt auch e unter den $\{e_1, \dots, e_m\}$ vor – vielleicht mehrmals, da die $\{e_1, \dots, e_m\}$ ja nicht alle verschieden sein müssen. Da an jeder Ecke e_j zwei verschiedene Kanten anstoßen, so müssen an e eine gerade Zahl von Kanten anstoßen. Damit ist der Grad $d(e)$ gerade und die erste Richtung des Satzes bewiesen.

Jetzt nehmen wir umgekehrt an, dass der **Grad jeder Ecke gerade** sei. Sei wieder m die Anzahl der Kanten im Graphen. Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion nach m . Die Aussage $\mathcal{A}(m)$ lautet folgendermaßen: *Jeder zusammenhängende Graph mit höchstens m Kanten und geradem Eckengrad enthält einen geschlossenen Eulerschen Weg.*

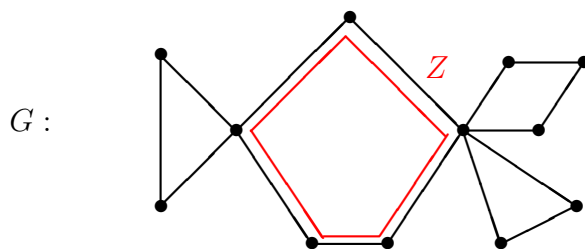
Für $m = 1$ haben wir einen zusammenhängenden Graphen mit höchstens einer Kante, also genau einer Kante (da der Graph zusammenhängend ist). Er muss so aussehen: $e_1 \overset{k}{\text{---}} e_2$, nur das kann nicht sein, da die Gerade der Ecken jeweils eins sind. Daher müssen wir unseren Induktionsbeweis bei $m = 2$ beginnen.

Für $m = 2$ muss unter der Voraussetzung, dass die Eckengrade gerade sind, der Graph so aussehen:

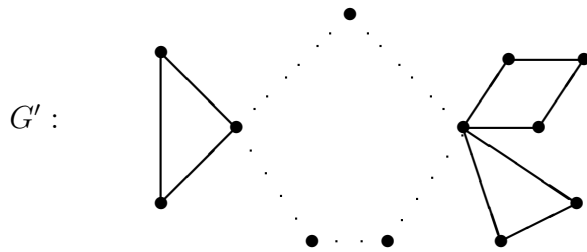


Ein Eulersche Weg für diesen einfachen Graphen ist $(e_1 k_1 e_2 k_2 e_1)$.

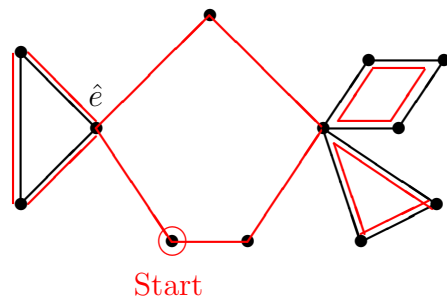
Sei $m \geq 2$ jetzt beliebig, und wir setzen voraus, dass jeder zusammenhängende Graph mit höchstens m Kanten und geradem Eckengrad einen geschlossenen Eulerschen Weg enthält. Sei G jetzt ein Graph mit $m + 1$ Kanten. Da der Grad von jeder Ecke von G mindestens 2 ist, so enthält er nach Satz 2.2 G einen Zyklus Z . (In der folgende Figur ist er rot gezeichnet.)



Wir streichen jetzt die Kanten von Z und erhalten einen neuen Graphen G' , der nicht mehr zusammenhängend zu sein braucht, die gleiche Eckenmenge wie G besitzt, aber weniger Kanten.



In diesem Beispiel zerfällt G' in 5 Zusammenhangskomponenten. Jeder Eckengrad von G' ist wieder gerade, da von jeder Ecke von Z genau zwei Kanten entfernt worden sind. Einige Ecken können aber Grad 0 haben (wie im Beispiel). Insbesondere muss G' nicht mehr zusammenhängend sein. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es in jeder Zusammenhangskomponente, deren Eckengrade ≥ 2 sind, einen geschlossenen Eulerschen Weg. Wir erhalten nun einen geschlossenen Eulerschen Weg von G folgendermaßen: Man beginne mit einem beliebigen Knoten von Z und gehe die Kante von Z entlang bis zu einem Knoten \hat{e} , der zu einer Komponente von G' gehört mit Grad ≥ 2 für alle ihre Ecken.



Dann schließe man einen Eulerschen Weg dieser Komponente an und kommt wieder zu \hat{e} zurück. Man verfolge den Zyklus Z weiter bis zur nächsten Zusammenhangskomponenten, etc. Damit ist ein geschlossener Eulersche Weg gefunden! \square

Man versuche, den folgenden Satz durch Rückführung auf Satz 2.5 zu beweisen!

Satz 2.6 *Sei G ein zusammenhängender Graph. G besitzt genau dann einen (nicht notwendig geschlossenen) Eulerschen Weg, wenn es höchstens 2 Knoten mit ungeradem Grad und sonst alle mit geradem Grad ≥ 2 gibt.*

3 Graphen und Matrizen

Wie kann man einen Graphen in einem Rechner speichern und verarbeiten? Es gibt unter anderem die folgenden Möglichkeiten:

(a) Man bildet die **Matrix**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

wobei a_{ij} für $i \neq j$ die Anzahl der Kanten angibt, die die Ecke e_i mit der Ecke e_j verbinden. Ferner vereinbart man $a_{ii} = 0$ für alle i . Die Matrix A heißt **Adjazenzmatrix** des Graphen¹. Sie ist **quadratisch** (hat also ebenso viele Zeilen wie Spalten) und **symmetrisch**, d.h. $a_{ij} = a_{ji}$ für alle i, j . Das Element a_{ij} steht in Zeile i und Spalte j .

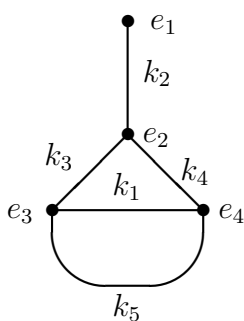
(b) G habe die Ecken e_1, \dots, e_n und die Kanten k_1, \dots, k_m . Man bildet die **Inzidenzmatrix** B durch

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{nm} \end{pmatrix}$$

wobei

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } e_i \text{ kein Endpunkt von } k_j \text{ ist,} \\ 1, & \text{wenn } e_i \text{ ein Endpunkt von } k_j \text{ ist.} \end{cases}$$

Die Inzidenzmatrix B ist i.a. **nicht** quadratisch!



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass uns die Summe der Elemente in der i -ten Zeile von B den Grad des Knoten e_i liefert, während die Summe der Elemente in jeder Spalte 2 ist (entsprechend den 2 Enden der Kante).

¹von adjazere=angrenzen, benachbart sein

Ausflug in die Matrizenrechnung:

Eine Matrix ist einfach eine rechteckige Anordnung von Zahlen. Wir schreiben dafür große lateinische Buchstaben A , B , u.s.w. Für die Komponenten der Matrix nehmen wir den entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben und schreiben etwa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}.$$

Hier beschreibt also m die Anzahl der Zeilen und n die Anzahl der Spalten. Das Element a_{ij} steht in Zeile i und Spalte j . Matrizen gleicher Größe können wir **addieren** und **subtrahieren**. Wir beschränken uns im Folgenden auf **quadratische** Matrizen (also $m = n$), denn wir haben ja Adjazenzmatrizen von Graphen im Auge.

Für $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ und $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ ist $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$,

also z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quadratische Matrizen können wir auch miteinander **multiplizieren**:

Sei $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ und $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$. Dann ist $C = AB$ gegeben durch

$C = (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$, wobei

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Das Element c_{ij} , das ja in der i -ten Zeile und der j -ten Spalte von $C = AB$ steht, berechnet sich als Skalarprodukt der Zeile i von A und der Spalte j von B .

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir bemerken, dass i.a. $AB \neq BA$ ist, also z.B.

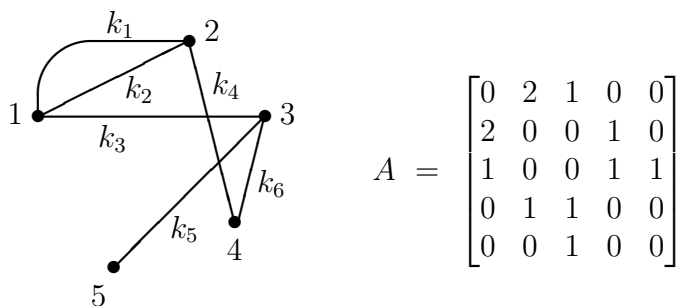
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

aber

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Außerdem erkennen wir, dass ein Matrizenprodukt Null sein kann, ohne dass einer der Faktoren Null ist. (Die Multiplikation von Matrizen ist also weder „kommutativ“ noch „nullteilerfrei“.) Ansonsten haben Addition und Multiplikation von Matrizen viele Eigenschaften, die wir von der Addition und Multiplikation von Zahlen gewohnt sind. Sie bilden einen sogenannten „Ring“.

Jetzt betrachten wir uns speziell die Adjazenzmatrizen von Graphen. Die Knoten bezeichnen wir mit den Nummern $1, 2, \dots, n$ anstelle von e_1, e_2, \dots, e_n .



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Ist $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,5}$, so ist z.B.

$$\begin{aligned} b_{14} &= a_{11} a_{14} + a_{12} a_{24} + a_{13} a_{34} + a_{14} a_{44} + a_{15} a_{54} \\ &= a_{12} a_{24} + a_{13} a_{34} + a_{15} a_{54} \end{aligned}$$

$$a_{12} = \text{Anzahl der Kanten von 1 nach 2}$$

$$a_{24} = \text{Anzahl der Kanten von 2 nach 4}$$

$$a_{12} a_{24} = \text{Anzahl der Wege der Länge 2 von 1 nach 4 über Knoten 2, also:}$$

$$b_{14} = \text{Anzahl der Wege der Länge 2 von 1 nach 4}$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_{11}^2 + a_{12} a_{21} + a_{13} a_{31} + a_{14} a_{41} + a_{15} a_{51} \\ &= a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{15}^2 \end{aligned}$$

$$a_{12}^2 = \text{Anzahl der „Kantenfolgen“ der Länge 2 von 1 nach 1 über 2, nämlich}$$

- 1 k_1 2 k_1 1
- 1 k_1 2 k_2 1
- 1 k_2 2 k_1 1
- 1 k_2 2 k_2 1

Analog:

$$a_{13}^2 = \text{Anzahl der „Kantenfolgen“ der Länge 2 von 1 nach 1 über 3, nämlich} \\ 1 k_3 2 k_3 1$$

Genauso ist $a_{14}^2 = a_{15}^2 = 0$ und daher $b_{11} = 5$.

Beachte: Kantenfolgen sind **keine Wege**, denn Kanten dürfen doppelt (und mehrfach) auftreten.

Fazit: Ist $A^2 = (b_{ij})$, so ist b_{ij} die Anzahl der Kantenfolgen der Länge 2 von Knoten i nach Knoten j .

Was $A + A^2$?

$(A + A^2)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = \text{Anzahl der Kantenfolgen der Längen 1 oder 2 von } i \text{ nach } j$.

Analog A^3 : Sei $B = A^2$, dann $C = A^3 = BA$ und

$$c_{ij} = b_{i1} a_{1j} + b_{i2} a_{2j} + \dots + b_{in} a_{nj}$$

$b_{ik} a_{kj} = \text{Anzahl der Kantenfolgen der Länge 3 von } i \text{ nach } j \text{ über } k$

Wir können leicht durch vollständige Induktion nach $p \in \mathbb{N}$ zeigen:

Satz 3.1 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Adjazenzmatrix eines Graphen und $B = A^p$ für ein $p \in \mathbb{N}$, $B = (b_{ij})$. Dann ist b_{ij} die Anzahl der Kantenfolgen der Länge p von i nach j .

Bilden wir $C := A + A^2 + \dots + A^p = (c_{ij})$, so ist c_{ij} die Anzahl aller Kantenfolgen der Länge höchstens p von i nach j .

Beweis: Induktionsanfang $p = 1$: a_{ij} ist Anzahl der Kantenfolgen der Länge 1 (dies sind gerade die Kanten selbst) von i nach j . Damit ist die Behauptung richtig für $p = 1$.

Induktionsschluss: Sei die Behauptung schon bewiesen für $p - 1$ statt p . Dann beschreibt mit $\tilde{B} = A^{p-1} = (\tilde{b}_{ij})$ das Element \tilde{b}_{ij} die Anzahl der Kantenfolgen der Länge $p - 1$ von i nach j . Es ist $B = A^p = \tilde{B}A$, also $b_{ij} = \tilde{b}_{i1} a_{1j} + \tilde{b}_{i2} a_{2j} + \dots + \tilde{b}_{in} a_{nj}$, und jeder Term $\tilde{b}_{ik} a_{kj}$ ist das Produkt der Anzahl der Kantenfolgen der Länge $p - 1$ von i nach k mit der Anzahl der Kanten von k nach j . Also ist $\tilde{b}_{ik} a_{kj}$ die Anzahl der Kantenfolgen der Länge p von i nach j . Damit ist die Behauptung auch für p bewiesen. Der zweite Teil ist klar. \square

Satz 3.2 Sei A die Adjazenzmatrix eines Graphen mit n Ecken und

$$B = A + A^2 + \dots + A^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} A^k = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}.$$

Dann ist $b_{ij} > 0$ genau dann, wenn i und j in derselben Zusammenhangskomponente liegen. Insbesondere ist der Graph selbst zusammenhängend genau dann, wenn $b_{ij} > 0$ für alle $i, j = 1, \dots, n$.

Beweis: Wenn i und j in derselben Zusammenhangskomponenten liegen, so gibt es einen Weg, der i und j verbindet. Da höchstens $n - 2$ Punkte echt zwischen i und j liegen, so besitzt der Weg höchstens $n - 1$ Kanten. Daher ist b_{ij} mindestens 1. Ist $b_{ij} > 0$ so bedeutet dies, dass es wenigstens eine Kantenfolge (der Länge höchstens $n - 1$) gibt, die i und j verbindet. Wir streichen in dieser Kantenfolge alle doppelten Kanten heraus und erhalten so einen Weg von i nach j . Also liegen i und j in derselben Zusammenhangskomponenten. \square