Der Gradient der Fundamentallösung und Abschätzungen

6. November 2007

Der Gradient der Fundamentallösung nach y ist (Kettenregel!)

$$
\begin{aligned}
\nabla_y \Phi(x,y) &= \frac{1}{4\pi} \nabla_y \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\nabla_y e^{ik|x-y|} \frac{1}{|x-y|} + e^{ik|x-y|} \nabla_y \frac{1}{|x-y|} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(ik \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \nabla_y |x-y| - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|^2} \nabla_y |x-y| \right).
\end{aligned}
$$

Die Gradient von $y \mapsto |x-y|$ berechnet sich folgendermaßen,

$$
\begin{aligned}
\nabla_y |x-y| &= \nabla_y \sqrt{\sum_{j=1}^{3} (x_j - y_j)^2} \\
&= \frac{1}{2|x-y|} 2(x-y)(-1) = \frac{y-x}{|y-x|}.
\end{aligned}
$$

Deshalb ist

$$
\nabla_y \Phi(x,y) = \frac{1}{4\pi} \left(ik \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{y-x}{|y-x|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|^2} \frac{y-x}{|y-x|} \right).
$$

Beachte, dass die Norm des Terms $(y-x)/|y-x|$ beschränkt ist durch Eins! Damit hat der Gradient der Fundamentallösung also eine Singularität der Ordnung 2 an $x = y$ und fällt im Unendlichen ab wie $1/|x-y|$:

$$
|\nabla_y \Phi(x,y)| \le \frac{1}{4\pi} \left(k \frac{1}{|x-y|} + \frac{1}{|x-y|^2} \right).
$$

Für $|x-y| > 1$ (und nur für solche x, die weit weg von y sind, interessieren wir uns in der Aufgabe), ist $|x-y| < |x-y|^2$, also $|x-y|^{-1} > |x-y|^{-2}$, und

$$
|\nabla_y \Phi(x,y)| \le \frac{\max(1,k)}{2\pi} \frac{1}{|x-y|}, \qquad |x-y| > 1.
$$