Übersicht: Integralbegriffe

Gebietsintegrale

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann schreiben wir das **Gebietsintegral** von f über D als (vgl. Abschnitt 2.1)

$$\iint_D f(x)\,dx \quad \text{oder} \quad \iint_D f(x_1, x_2)\,d(x_1, x_2).$$

Ist D ein Rechteck, also $D = I \times J$ mit Intervallen I, $J \subseteq \mathbb{R}$, so kann das Gebietsintegral leicht über das **iterierte Integral** ausgerechnet werden (vgl. Abschnitt 2.2):

$$\iint_D f(x_1, x_2)\,d(x_1, x_2) = \int_I \int_J f(x_1, x_2)\,dx_2\,dx_1 = \int_J \int_I f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2.$$

Für ein komplizierteres Gebiet, etwa

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x_1) \le x_2 \le \psi(x_1), a \le x_1 \le b\},$$

gilt die analoge Formel

$$\iint_D f(x_1, x_2)\,d(x_1, x_2) = \int_a^b \int_{\varphi(x_1)}^{\psi(x_1)} f(x_1, x_2)\,dx_2\,dx_1.$$

In anderen Fällen wendet man die **Transformationsformel** an: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\Psi : D \to B$ stetig differenzierbar (dazu kommen noch weitere Voraussetzungen, vgl. Satz 2.12). Dann ist

$$\iint_D f(x)\,dx = \iint_B f(\Psi(y))\,|\det \Psi'(y)|\,dy.$$

Analoge Formeln gelten für den 3-dimensionalen Fall (*Volumenintegrale*).

Kurvenintegrale

Sei $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung einer glatten Kurve C und $f : C \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist das **Kurvenintegral** von f über C definiert durch (Definition 3.9)

$$\int_C f(x)\,ds := \int_a^b f(x(t))\,\|\dot{x}(t)\|_2\,dt.$$

Für $F : C \to \mathbb{R}^n$ (also ein Vektorfeld) gibt es verschiedene Kurvenintegrale: Zum einen wird dasselbe Symbol wie oben verwendet, das Ergebnis ist dann der Vektor der komponentenweise gebildeten Integrale (z.B. Schwerpunktsberechnung).
Beim **tangential orientierten Kurvenintegral** (Gleichung (3.1)),

$$\int_C F(x) \cdot ds := \int_a^b F(x(t)) \cdot \dot{x}(t)\,dt,$$

kommt dagegen ein Skalar heraus.
Im 2-dimensionalen Fall wird auch das **normal orientierte Kurvenintegral** (vgl. den Gaußschen Satz 3.19) verwendet:

$$\int_C F(x) \cdot \nu(x)\, ds = \int_a^b F(x(t)) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_2(t) \\ -\dot{x}_1(t) \end{pmatrix} dt.$$

Die Normale ist hier so gewählt, dass sie von der Richtung aus gesehen, in der die Kurve durchlaufen wird, nach rechts zeigt.

Oberflächenintegrale

Sei nun $X : B \to \mathbb{R}^3$ Parametrisierung eines reguläres Flächenstück S und $f : S \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist das **Oberflächenintegral** von f über S definiert durch (Definition 3.14)

$$\iint_S f(x)\, do := \iint_B f(X(u,v))\, \|X_u(u,v) \times X_v(u,v)\|\, d(u,v),$$

also ein *Gebietsintegral*.
Daneben gibt es für ein Vektorfeld $F : S \to \mathbb{R}^3$ auch den **Fluss** von F durch S (Definition 3.16):

$$\iint_S F(x) \cdot do := \iint_B F(X(u,v)) \cdot (X_u(u,v) \times X_v(u,v))\, d(u,v).$$

Beachte: Bei diesem Integral kommt es auf die Richtung des (nicht-normierten) Normalenvektors $X_u(u,v) \times X_v(u,v)$ an!