Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Tilo Arens / Dipl.-Math. Kai Sandfort

zum Übungsblatt 1 "Streuprobleme"

Lösung zur 1. Aufgabe:

Bessel'sche D.gl.:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)\, y = 0, \qquad x > 0,\, m \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

Vorbemerkung: Da die Variable m nur im Quadrat in (1) auftritt, setzen wir o.B.d.A. $m \in \mathbb{N}_0$ voraus.

Es gilt

$$\begin{aligned} x^2\, y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(n+\lambda)\,(n+\lambda-1)\,x^{n+\lambda}, \\ x\, y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(n+\lambda)\,x^{n+\lambda}, \\ x^2\, y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n\,x^{n+\lambda+2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n-2}\,x^{m+\lambda} \quad \text{mit } b_{-2} := b_{-1} := 0. \end{aligned}$$

Einsetzen in (1) und Zusammenfassen ergibt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(b_n\,\big((n+\lambda)^2 - m^2\big) + b_{n-2}\Big)\; x^{n+\lambda} = 0. \tag{2}$$

Da (2) für alle $x > 0$ gelten soll, erhalten wir

$$b_n\,\big((n+\lambda)^2 - m^2\big) + b_{n-2} = 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3}$$

eine Rekursionsformel für die Koeffizienten b_n, $n \geq 0$. Für $n = 0$ führt (3) mit $b_0 \neq 0$, $b_{-2} = 0$ zu $\lambda \in \{-m, +m\}$. Da wir dies nur anhand des Falls $n = 0$ bestimmt haben, müssen wir überprüfen, ob tatsächlich beide Werte $\lambda = -m$ und $\lambda = +m$ zu Lösungsfolgen $\{b_n\}_{n\geq 0}$ der Rekursionsformel (3) führen.

Fallunterscheidung:

- *1. Fall:* $\lambda = -m$

  Die Gleichung (3) wird zu

  $$b_n\, n\,(n-2m) + b_{n-2} = 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

  Wegen $1-2m \neq 0$ und $b_{-1} = 0$ folgt daraus $b_1 = 0$, und somit durch Iteration

  $$b_n = 0 \quad \text{für } n \text{ ungerade} \Rightarrow n\,(n-2m) \neq 0.$$

  Für gerade Indizes verwenden wir $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}_0$, und (3) wird zu

  $$b_{2k}\, 4k\,(k-m) + b_{2(k-1)} = 0, \qquad k \in \mathbb{N}_0. \tag{4}$$

  Mit $b_0 \neq 0$ folgt aus (4) durch Iteration

  $$b_{2k} \neq 0 \quad \text{für } 0 \leq k < m, \text{ insb. } b_{2(m-1)} \neq 0.$$

  Für $k = m$ erhalten wir aus (4) jedoch $b_{2(m-1)} = 0$, Widerspruch!
  Der Fall $\lambda = -m$ führt also zu keiner Lösungsfolge von (3) und damit zu keiner Lösung von (1).

- *2. Fall:* $\lambda = +m$

  Die Gleichung (3) wird zu

  $$\begin{aligned} & b_n\, n\,(n+2m) + b_{n-2} = 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0 \\ \Leftrightarrow \quad & b_{-2} = 0 \ \wedge \ b_n = -\frac{1}{n\,(n+2m)}\, b_{n-2}, \qquad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{5}$$

  Wegen $b_{-1} = 0$ folgt $b_1 = 0$ und durch Iteration

  $$b_n = 0 \quad \text{für } n \text{ ungerade.}$$

  Für gerade $n \neq 0$ schreiben wir wieder $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Aus der Betrachtung von (5) wird klar, dass $b_0 \neq 0$ frei wählbar ist und alle b_n für gerade $n \neq 0$ von b_0 abhängen. Durch rekursives Einsetzen der Ausdrücke für b_{n-2}, $n \geq 2$

gerade, erhalten wir aus (5)

$$
\begin{aligned}
& b_{2k} = -\frac{1}{4k\,(k+m)}\, b_{2(k-1)}, \qquad k \in \mathbb{N} \\
\Leftrightarrow\quad & b_2 = -\frac{1}{4(1+m)}\, b_0 \quad \wedge \\
& b_{2k} = \left(-\frac{1}{4k\,(k+m)}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4(k-1)\,(k-1+m)}\right) b_{2(k-2)}, \qquad k \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \\
\Leftrightarrow\quad & b_{2k} = b_0 \prod_{j=0}^{k-1} \left(-\frac{1}{4(k-j)\,(k-j+m)}\right), \qquad k \in \mathbb{N} \\
\Leftrightarrow\quad & b_{2k} = (-1)^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \frac{1}{k!}\, \frac{1}{(k+m)!\,/\,m!}\, b_0, \qquad k \in \mathbb{N} \\
\Leftrightarrow\quad & b_{2k} = (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \frac{m!}{k!\,(k+m)!}\, b_0, \qquad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Setzen wir nun die Koeffizienten b_n, $n \in \mathbb{N}_0$, aus dem 2. Fall in den Ansatz ein, ergeben sich als Lösungen von (1) die Funktionen

$$
y(x) = 2^m\, m!\, b_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}, \qquad x > 0,\ m \in \mathbb{N}_0. \tag{6}
$$

Da b_0 frei wählbar ist, normieren wir den Vorfaktor durch $b_0 := (2^m\, m!)^{-1}$ und erhalten

$$
y(x) = J_m(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\,(k+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}, \qquad x > 0,\ m \in \mathbb{N}_0, \tag{7}
$$

die *Bessel-Funktionen der ersten Art (von der Ordnung m).*

Bemerkungen:

- Wie aus (1) ersichtlich, ist mit einer Lösung f auch jede Funktion sf, $s \in \mathbb{C}$, Lösung. Für Lösungen von der Form des Ansatzes führt dies zur freien Wahl von b_0, siehe (6).
- Beachten Sie, dass wir durch unseren Ansatz möglicherweise nicht alle Lösungen von (1) erfassen. Dies ist tatsächlich der Fall, d.h. es gibt Lösungen, die nicht die Form unseres Ansatzes haben.
- Die Potenzreihe in (7) konvergiert für alle $x \in \mathbb{C}$, dies läßt sich mittels des Quotientenkriteriums zeigen. Die auf $\mathbb{C}$ definierten Funktionen (7) sind Lösungen der entsprechend auf $\mathbb{C}$ erweiterten Bessel'schen D.gl.