Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Tilo Arens / Dipl.-Math. Kai Sandfort

Übungsblatt 1
zur Vorlesung "Streuprobleme" im WS 07/08

1. Aufgabe: Lösen Sie die Bessel'sche Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - m^2)\, y = 0, \qquad x > 0,\, m \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

unter Verwendung des verallgemeinerten Potenzreihenansatzes

$$y(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n, \qquad x > 0,\, \lambda \in \mathbb{C},\, b_n \in \mathbb{C},\, n \in \mathbb{N}_0,\, b_0 \neq 0.$$

Bem.: Die Lösungen J_m von (1), die Sie damit erhalten, heißen *Bessel-Funktionen der ersten Art.*

2. Aufgabe: Gegeben sei eine α-quasi-periodische ($\alpha \in \mathbb{R}$) Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, d.h.

$$u(x_1 + 2\pi, x_2) = e^{i\,\alpha\, 2\pi}\, u(x_1, x_2), \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass u eine Entwicklung der Form

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(x_2)\, e^{i\,\alpha_n\, x_1}, \qquad \alpha_n := \alpha + n,\, n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

besitzt.

(b) Die Funktion u erfülle die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u + k^2\, u = 0, \qquad k > 0, \tag{3}$$

in der oberen Halbebene $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$. Berechnen Sie für α-quasi-periodische und beschränkte Lösungen u von (3) die Funktionen u_n aus (2) mit $x_2 > 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Schreiben Sie abschließend u für $x_2 > 0$ als Reihe.
Bem.: Verwenden Sie die (übliche) Definition für die komplexe Wurzel mit $\sqrt{x} := i\,\sqrt{-x}$ für $x \in \mathbb{R}^-$.