Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Tilo Arens / Dipl.-Math. Kai Sandfort

Übungsblatt 2
zur Vorlesung "Streuprobleme" im WS 07/08

3. Aufgabe: Zeigen Sie, dass die Fundamentallösung Φ der Helmholtz-Gleichung im $\mathbb{R}^3$,

$$\Phi(x,y) := \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\,k\,|x-y|}}{|x-y|}, \qquad x, y \in \mathbb{R}^3,\ x \neq y,$$

die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung

$$\lim_{r\to\infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - i\,k\,u \right) = 0, \qquad r = |x|, \tag{1}$$

erfüllt.
Bem.: Die Bezeichnung „Ausstrahlungsbedingung“ ist darin begründet, dass (1) physikalisch gesehen ausstrahlende Wellen charakterisiert. Für $u = \Phi(\cdot, y)$ heißt das, dass Energie von y weg transportiert wird.

4. Aufgabe: Zeigen Sie, dass für die ausstrahlende Lösung von

$$\Delta u + k^2\, u = 0, \qquad k > 0,\ x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega},$$

zu einem beschränkten $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ die folgenden asymptotischen Relationen gelten:

$$u(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|} \right), \qquad |x| \to \infty,$$

und

$$\lim_{r\to\infty} \int_{S_r} |u(x)|^2 \, d\sigma = \frac{1}{k}\ Im \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, \overline{u}\, d\sigma, \qquad S_r := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = r\}.$$