Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Tilo Arens / Dipl.-Math. Kai Sandfort

Lösung zum Übungsblatt 3 "Streuprobleme"

Lösung zur 5. Aufgabe:

(i) Laut Vorlesung kann man die Fundamentallösung Φ schreiben als

$$\Phi(x, y) = \frac{i}{4} \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_n^{(1)}(k\,|x|)\, J_n(k\,|y|)\, e^{i\,n\,(\varphi(x)-\varphi(y))}. \tag{1}$$

Dem Buch von Abramowitz und Stegun kann man entnehmen, dass

$$H_n^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi\, z}}\, e^{i\,(z - n\,\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|}\right)\right).$$

Mit $z = k\,|x|$ folgt für das Fernfeld

$$H_n^{(1)\infty} \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi\, k}}\, e^{i\,(-n\,\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} = -4\, i\, \gamma_2\, e^{-i\,n\,\frac{\pi}{2}}. \tag{2}$$

Wir bilden nun die Fernfelder auf beiden Seiten von (1):

$$\begin{aligned}
\gamma_2\, e^{-i\,k\,\hat{x}\cdot y} &= \frac{i}{4} \sum_{n \in \mathbb{Z}} -4\, i\, \gamma_2\, e^{-i\,n\,\frac{\pi}{2}}\, J_n(k\,|y|)\, e^{i\,n\,(\varphi(x)-\varphi(y))} \\
&= \gamma_2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-i)^n\, J_n(k\,|y|)\, e^{i\,n\,(\varphi(x)-\varphi(y))} \\
&= \gamma_2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-i)^n\, J_n(k\,|y|)\, e^{i\,n\,\pi}\, e^{i\,n\,(\varphi(x)-\varphi(y)-\pi)} \\
&= \gamma_2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} i^n\, J_n(k\,|y|)\, e^{i\,n\,\sphericalangle(y, -\hat{x})}.
\end{aligned}$$

Mit der Umbenennung von $-\hat{x}$ in d und von y in x zeigt sich die Behauptung.

(ii) Laut Vorlesung läßt sich die Funktion u^s in $\mathbb{R}^2 \backslash B(0, \tilde{R})$ mit $\tilde{R} > 1$ in die Reihe

$$u^s(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n\, H_n^{(1)}(k\,|x|)\, e^{i\,n\,\varphi(x)} \tag{3}$$

entwickeln. Nach der Problemstellung suchen wir ein u^s, für das $u^s = -\tilde{u}$ auf $\partial B(0,1)$ gilt, das also dort insb. beschränkt ist. Durch Gleichsetzen der Entwicklungen für u^s und $\tilde{u}$ auf $\partial B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\, H_n^{(1)}(k)\, e^{i\,n\,\varphi(x)} = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} i^n\, J_n(k)\, e^{i\,n\,\varphi(x)}, \qquad x \in \partial B(0,1) \\ \Leftrightarrow \quad & b_n = -i^n\, \frac{J_n(k)}{H_n^{(1)}(k)}, \qquad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

und damit aus (3) die Behauptung

$$u^s(x) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} i^n\, \frac{J_n(k)}{H_n^{(1)}(k)}\, H_n^{(1)}(k\,|x|)\, e^{i\,n\,\varphi(x)}. \tag{4}$$

(iii) Aus (4) folgt unter Verwendung von (2) für das Fernfeld

$$\begin{aligned} u^\infty(\hat{x}) &= -\sum_{n\in\mathbb{Z}} i^n\, \frac{J_n(k)}{H_n^{(1)}(k)}\, (-4\,i\,\gamma_2\, e^{-i\,n\,\frac{\pi}{2}})\, e^{i\,n\,\varphi(\hat{x})} \\ &= 4\,\gamma_2\, i \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{J_n(k)}{H_n^{(1)}(k)}\, e^{i\,n\,\varphi(\hat{x})}. \end{aligned}$$