Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Tilo Arens / Dipl.-Math. Kai Sandfort

Übungsblatt 3
zur Vorlesung "Streuprobleme" im WS 07/08

5. Aufgabe:

(i) Zeigen Sie, dass eine ebene Welle $\tilde{u}(x) := e^{i\,k\,x\cdot d}$ mit $d := (\cos\theta,\, -\sin\theta)^T$, $\theta \in [0, \pi)$, gemäß

$$\tilde{u}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} i^n\, J_n(k\,|x|)\, e^{i\,n\,\varphi(x)}, \qquad \varphi(x) := \sphericalangle(x, d), \tag{1}$$

als Überlagerung von zylindrischen Wellen geschrieben werden kann.
Hinweis: Verwenden Sie hierfür, dass eine ebene Welle das Fernfeld der Fundamentallösung Φ ist!
Bem.: Die Darstellung (1) heißt *Jacobi-Anger-Entwicklung.*

(ii) Gegeben sei für $B(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$ das Streuproblem

$$\begin{aligned} &\Delta u^t + k^2\, u^t = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \backslash \overline{B(0,1)}, \\ &u^t = 0 \quad \text{auf } \partial B(0,1), \\ &u^s = u^t - \tilde{u} \text{ erfüllt die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung.} \end{aligned} \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass das gestreute Feld u^s die Entwicklung

$$u^s(x) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} i^n\, \frac{J_n(k)}{H_n^{(1)}(k)}\, H_n^{(1)}(k\,|x|)\, e^{i\,n\,\varphi(x)}$$

besitzt.
Bem.: Die Dirichlet-Randbedingung (2) bedeutet physikalisch, dass der akustische Druck, gegeben durch $u^t = \tilde{u} + u^s$, auf dem Rand $\partial B(0,1)$ des Streuobjekts verschwindet. Das Streuobjekt wird dann als *sound-soft* bezeichnet.

(iii) Bestimmen Sie den Entwicklungsausdruck für das Fernfeld u^∞ des gestreuten Feldes u^s aus (ii).