Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Tilo Arens / Dipl.-Math. Kai Sandfort

zum Übungsblatt 4 “Streuprobleme”

zur 6. Aufgabe:
Herleitung der sphärischen Bessel'schen D.gl.:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} u_1(r)\right) + (k^2 r^2 + \lambda)\, u_1(r) = 0 \tag{1}$$

Mit $u_1(r) := v(k\,r),\ z := k\,r,\ \lambda := -n\,(n+1)$ wird (1) zu

$$\begin{aligned} & 2\,r\,\frac{\partial}{\partial r} v(z) + r^2\,\frac{\partial^2}{\partial r^2} v(z) + (k^2\,r^2 - n\,(n+1))\,v(z) = 0 \\ \overset{r\neq 0}{\Leftrightarrow}\quad & \frac{\partial^2}{\partial r^2} v(z) + \frac{2}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} v(z) + \left(k^2 - \frac{n\,(n+1)}{r^2}\right) v(z) = 0. \end{aligned}$$

Lösung zur 7. Aufgabe:

$$Fu = u^\infty \tag{2}$$

Bemerkungen:
Nach J. S. Hadamard heißt das Problem (2) „wohl-/gut-gestellt“, wenn

- für alle zulässigen rechten Seiten u^∞ eine Lösung existiert,
- die Lösung eindeutig ist,
- die Lösung stetig von der rechten Seite u^∞ abhängt.

Ein Problem, für das nicht alle drei Kriterien erüllt sind, heißt „schlecht-gestellt“. Ein schlecht-gestelltes Problem kann

- durch Einschränkung der Menge zulässiger rechter Seiten,
- durch Modifikation des Operators, d.h. des zugrundeliegenden Modells,
- durch andere Wahl der Topologien bzw. der (durch Normen implizierten) erzeugenden Metriken

in ein gut-gestelltes Problem abgewandelt werden. Dieses ist dann jedoch ggf. keine sinnvolle Repräsentation des modellierten Problems mehr.

Wir untersuchen nun (das inverse Problem zu) (2):

- Falls es eine Lösung zum inversen Problem zu (2) gibt, ist sie nach Satz 2.13 aus Colton/Kress '98 eindeutig bestimmt. $\Rightarrow F$ ist injektiv
- Eine Lösung erfordert die Gültigkeit der Wachstumsbedingung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n}{k\, e\, R}\right)^{2n} \sum_{m=-n}^{n} |b_{n,m}|^2 < \infty \tag{3}$$

  mit R und $\{b_{n,m}\}$ aus Satz 3.13. Im Allgemeinen gibt es daher für $u^\infty \in L^2(S^2)$ *keine* Lösung zu (2).

- Begründung zum 3. Kriterium: u hängt in keiner adäquaten Norm von u^∞ ab
  Mit

$$Y_j := \sum_{m=-j}^{j} \tilde{b}_{j,m}\, Y_j^m$$

  betrachten wir die ausstrahlenden Lösungen

$$u_j(x) := \frac{1}{j}\, h_j^{(1)}(k\,|x|)\, Y_j(\hat{x}).$$

  Diese haben gemäß Satz 3.12 (b) die Entwicklung

$$u_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} b_{n,m}\, h_n^{(1)}(k\,|x|)\, Y_n^m(\hat{x}),$$

  wobei

$$b_{n,m} = \begin{cases} 1/j\ \tilde{b}_{j,m} & \text{für } n = j \text{ and } m = -j, \dots, j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

  Die Koeffizienten $b_{n,m}$ erfüllen offensichtlich die Wachstumsbedingung (3)!
  Nach Satz 3.13 hat $u_j(x)$ das Fernfeld

$$u_j^\infty = \frac{1}{k}\,(-i)^{j+1} \sum_{m=-j}^{j} \frac{1}{j}\, \tilde{b}_{j,m}\, Y_j^m = \frac{1}{k\, j\, i^{j+1}}\, Y_j.$$

Damit folgt $u_j^\infty \to 0$ für $j \to \infty$ in der $L^2(S^2)$-Norm.
Aufgrund des asymptotischen Verhaltens

$$h_j^{(1)}(t) = \mathcal{O}\left(\frac{2j}{e\,t}\right)^j, \quad j \to \infty, \tag{4}$$

(siehe Beweis zu Satz 3.13, (4) folgert aus Satz und Def. 1.6 und Stirling's Formel) konvergiert hingegen u_j in keiner sinnvollen Norm.