Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Tilo Arens / Dipl.-Math. Kai Sandfort

Lösung zum Übungsblatt 5 "Streuprobleme"

Lösung zur 8. Aufgabe:
Für $t > 0$ gilt

$$\frac{d^n}{dt^n} f = a_n(\tilde{t})\, e^{1-\tilde{t}}, \qquad \tilde{t} := 1/t,\ n \in \mathbb{N},$$

wobei a_n ein Polynom ist, und durch die Kettenregel $deg(a_{n+1}) = deg(a_n) + 2$. Damit erhalten wir

$$\lim_{t \to 0^+} \left(\frac{d^n}{dt^n} f \right) [t] = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

da alle Polynome in $\tilde{t}$ ($\to \infty$ für $t \to 0^+$) langsamer wachsen als $e^{-\tilde{t}}$ in $\tilde{t}$ abfällt. Also sind alle Ableitungen von f in t, die in $\mathbb{R}^+$ und $\mathbb{R}_0^-$ offensichtlich stetig sind, in $t = 0$ stetig verbunden, d.h. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Anmerkungen zum Beweis von $g \in C^\infty(\mathbb{R})$:
- Durch UND-Verknüpfung der Bedingungen der stückweisen Definitionen von f und g erhält man eine von f unabhängige, stückweise Darstellung von g.
- Nach kurzer Erklärung genügt es zu zeigen, dass jede Ableitung von g in den Randpunkten der Darstellungsabschnitte stetig ist.
- Es bietet sich an, vollständige Induktion (wie implizit auch im Beweis oben) zu verwenden.
- Man erspart sich Arbeit durch Untersuchung auf Symmetrie.

Lösung zur 9. Aufgabe:
Wir definieren die Mengenfolge $\{\tilde{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$\tilde{U}_n := \{z_x \mid x \in \partial U\}, \qquad z_x := x - \nu(x)/n,$$

wobei $\nu(x)$ der äußere Normalenvektor an ∂U in x ist. Aus Satz 2.2 in Colton/Kress '83 folgt, dass für $\partial U \in C^2$ die Abbildung $x \mapsto z_x$ für genügend große n bijektiv ist (Überlegen Sie, warum!) Die Menge $\tilde{U}_n$ ($\in C^1$) stellt dann einen zu ∂U parallelen Rand dar. Wir bezeichnen das eingegrenzte Gebiet mit U_n, also $\partial U_n = \tilde{U}_n$.
Weiterhin definieren wir die Funktionenfolge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$u_n(x) := \chi_{U_n}(x) + (\chi_U - \chi_{U_n})(x)\, n\, dist(x, \partial U) \qquad \in C(\overline{U}) \cap L^2(U),$$

wobei χ_U die charakteristische Funktion von U bezeichnet. Es gilt

$$u_n|_{\partial U} = 0, \quad u_n \to 1 \text{ für } n \to \infty \quad \text{in } L^2(U),$$

und die Limesfunktion $\lim_{n\to\infty} u_n$ in U hat eine stetige Fortsetzung mit Wert 1 auf den Rand ∂U. Wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} Tu_n = \lim_{n\to\infty} u_n|_{\partial U} = 0 \quad \text{in } L^2(\partial U). \tag{1}$$

Ist T beschränkt bzw. stetig, so gilt die Konvergenztreue

$$\lim_{n\to\infty} Tu_n = T(\lim_{n\to\infty} u_n) = T1 = 1 \quad \text{in } L^2(\partial U). \tag{2}$$

Aus dem Widerspruch von (1) und (2) folgt, dass T nicht beschränkt sein kann. Wie leicht einzusehen, können wir einen Widerspruch auch in einer kleineren Funktionenklasse herbeiführen, z.B. durch $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$u_n(x) := \chi_{U_n}(x) + (\chi_U - \chi_{U_n})(x)\, g(n\ dist(x, \partial U)) \quad \in C^\infty(\overline{U}) \cap L^2(U)$$

und g aus der 8. Aufgabe.