Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität · gegründet 1825

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Tilo Arens / Dipl.-Math. Kai Sandfort

zum Übungsblatt 6 "Streuprobleme"

Lösung zur 10. Aufgabe:
Sei $u \in H_\alpha$. Dann gibt es eine Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\overline{U})$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_{H^1(U)} = 0$$

und

$$u_n = 0 \text{ in } \tilde{U} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \quad u = 0 \text{ f.ü. in } \tilde{U}, \quad \lambda\{\tilde{U}\} \geq \alpha.$$

Wegen der letzten Bedingung existieren $y \in \tilde{U}$ und $\varepsilon > 0$, so dass $B(y,\varepsilon) \subset \tilde{U}$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung können wir schreiben

$$u_n(x) = u_n(x) - u_n(y) = \int_0^{|x-y|} \frac{\partial u_n}{\partial s}(y + t\,s)\,dt, \quad s = \frac{x-y}{|x-y|},\, x \in U.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &\leq \left(\int_0^{|x-y|} \left|\frac{\partial u_n}{\partial s}(y+t\,s)\right| dt\right)^2 \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_0^{|x-y|} 1\,dt\right)\left(\int_0^{|x-y|} \left|\frac{\partial u_n}{\partial s}(y+t\,s)\right|^2 dt\right) \\ &\leq 2\int_0^{|x-y|} |\nabla u_n(y+t\,s)|^2\,dt. \end{aligned}$$

Hier haben wir ausgenutzt, dass $|x-y| \leq 2$ für $x, y \in B(0,1)$ und jede Richtungsableitung im Betrag durch den Gradienten nach oben abgeschätzt werden kann.

Wir integrieren nun $|u_n|^2$ über U und verwenden Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\int_U |u_n(x)|^2\,dx &\leq 2\int_U \int_0^{|x-y|} |\nabla u_n(y+t\,s)|^2\,dt\,dx \\
&\overset{(\star)}{=} 2\int_0^{2\pi}\int_0^{R(\varphi)}\int_0^r \left|\nabla u_n\left(y+t\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}\right)\right|^2 dt\,r\,dr\,d\varphi \\
&\leq 2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}R(\varphi)^2\int_0^{R(\varphi)} \left|\nabla u_n\left(y+t\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}\right)\right|^2 dt\,d\varphi \\
&\leq 4\int_0^{2\pi}\int_0^{R(\varphi)} \left|\nabla u_n\left(y+t\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}\right)\right|^2 dt\,d\varphi \\
&\leq 4\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{R(\varphi)} \left|\nabla u_n\left(y+t\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}\right)\right|^2 dt\,d\varphi \\
&\overset{(\star\star)}{=} 4\int_{U\setminus B(y,\varepsilon)} |\nabla u_n(x)|^2\,\frac{1}{r}\,dx \\
&\leq \frac{4}{\varepsilon}\int_U |\nabla u_n(x)|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Hierbei sind $r := |x-y|$ und $R(\varphi) := \sup\{t \in \mathbb{R}_0^+ \mid y + t\,(\cos\varphi, \sin\varphi)^T \in U\} \leq 2$. An den Stellen $(\star)$ und $(\star\star)$ gehen die Beträge der Determinanten der Transformationsmatrizen als Faktoren ein. Beachten Sie, dass die Abschätzung des Faktors $1/r$ aus der Rücktransformation die Voraussetzung $\lambda\{u^{-1}(0)\} \geq \alpha > 0$ notwendig macht! Da $u_n \to u$ für $n \to \infty$ in $H^1(U)$, gilt schließlich auch

$$\int_U |u(x)|^2\,dx \leq \frac{4}{\varepsilon}\int_U |\nabla u(x)|^2\,dx.$$