Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Tilo Arens / Dipl.-Math. Kai Sandfort

Lösung zum Übungsblatt 7 "Streuprobleme"

Lösung zur 12. Aufgabe:

(i) $\Rightarrow$: Sei $u \in H^1(D)$. Durch Einschränkung gilt offensichtlich $u|_{D_1} \in H^1(D_1)$ und $u|_{D_2} \in H^1(D_2)$. Anwendung der ersten Green'schen Identität (hierfür brauchen wir D, D_1, D_2 lipschitz) liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D (\nabla u \cdot \nabla v + u\,\Delta v)\,dx \\ &= \int_{D_1} (\nabla u \cdot \nabla v + u\,\Delta v)\,dx + \int_{D_2} (\nabla u \cdot \nabla v + u\,\Delta v)\,dx \\ &= \int_\Gamma [\gamma_D^{\boldsymbol{\cdot}} u]\,\frac{\partial v}{\partial \nu}\,ds = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(D). \end{aligned} \tag{1}$$

Man beachte, dass $\nu_{D_1}(x) = -\nu_{D_2}(x)$ für $x \in \Gamma$, wobei ν_{D_j} den Normalenvektor an D_j für $j = 1, 2$ bezeichne. Aus (1) folgert $[\gamma_D^{\boldsymbol{\cdot}} u]_\Gamma = 0$.

$\Leftarrow$: Die Funktion

$$u = \begin{cases} u|_{D_1} & \text{in } D_1 \\ u|_{D_2} & \text{in } D_2 \end{cases}$$

ist offensichtlich ein Element von $L^2(D)$. Wir setzen die partiellen Differentialoperatoren $\mathcal{D}_k := \partial/\partial x_k$ für $k = 1, 2$ durch

$$\mathcal{D}_k u := \begin{cases} \mathcal{D}_k\, u|_{D_1} & \text{in } D_1 \\ \mathcal{D}_k\, u|_{D_2} & \text{in } D_2 \end{cases},$$

wobei $\mathcal{D}_k\, u|_{D_j}$ die erste schwache Ableitung von u bzgl. x_k (Def. 4.1 aus der Vorlesung) im jeweiligen Gebiet D_j, $j = 1, 2$, bezeichne.
Sei nun zunächst $u \in C^1(\overline{D})$, so dass die schwache Ableitung $\mathcal{D}_k\, u|_{D_j}$ mit der starken Ableitung $\partial/\partial x_k\, u|_{D_j}$ für $j = 1, 2$ übereinstimmt (Fazit nach Def. 4.1 aus der Vorlesung). Partielle Integration führt mit $v \in C_0^\infty(D)$ auf

$$\int_{D_j} u\,\mathcal{D}_k v\,dx = \int_{D_j} (\operatorname{div}(u\,v\,e_k) - \mathcal{D}_k u\,v)\,dx$$

für $j = 1, 2$, wobei e_k der k-te Einheitsvektor ist. Nach dem Gauß'schen Satz (Satz 4.6 aus der Vorlesung) gilt dann

$$\int_{D_j} u\,\mathcal{D}_k v\,dx = \int_\Gamma u\,v\,e_k\cdot\nu\,ds - \int_{D_j} \mathcal{D}_k u\,v\,dx. \tag{2}$$

Da $C^1(\overline{D})$ dicht in $H^1(D)$ bzgl. der H^1-Norm liegt, verstehen wir (2) mit der schwachen Ableitung $\mathcal{D}_k u|_{D_j}$ ebenso für $u \in H^1(D)$.
Nutzen wir nun $[\gamma_D^{\boldsymbol{\cdot}} u]_\Gamma = 0$ aus, so erhalten wir

$$\int_{D_1} u\,\mathcal{D}_k v\,dx + \int_{D_2} u\,\mathcal{D}_k v\,dx = -\int_{D_1} \mathcal{D}_k u\,v\,dx - \int_{D_2} \mathcal{D}_k u\,v\,dx \quad \forall v \in C_0^\infty(D).$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\int_D \mathcal{D}_k u\,v\,dx &= \int_{D_1} \mathcal{D}_k u\,v\,dx + \int_{D_2} \mathcal{D}_k u\,v\,dx\\ &= -\int_{D_1} u\,\mathcal{D}_k v\,dx - \int_{D_2} u\,\mathcal{D}_k v\,dx\\ &= -\int_D u\,\mathcal{D}_k v\,dx \quad \forall v \in C_0^\infty(D).\end{aligned}$$

Das Element $\mathcal{D}_k u$ ist demnach die erste schwache Ableitung von u bzgl. x_k im Gebiet D (Def. 4.1 aus der Vorlesung). Es existieren also die schwachen Ableitungen der Ordnungen α mit $|\alpha| \le 1$, d.h. $u \in H^1(D)$ (Bemerkung nach Def. 4.3 aus der Vorlesung).

(ii) Wir setzen $\tilde{u} := u - f$, so dass $\gamma_D^0 \tilde{u} = 0$. Nach der ersten Green'schen Identität erhalten wir

$$\int_{D_j} (\nabla\tilde{u}\cdot\nabla v + \Delta\tilde{u}\,v)\,dx = \int_{\partial D_j} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\nu}\,v\,ds = \int_\Gamma \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\nu}\,v\,ds \quad \forall v \in C_0^\infty(D)$$

für $j = 1, 2$. Die Sprungrelation $[k\,\gamma_N^{\boldsymbol{\cdot}} u]_\Gamma = 0$ führt somit auf

$$\int_D \left(\tilde{k}\,\nabla\tilde{u}\cdot\nabla v + \tilde{k}\,\Delta\tilde{u}\,v\right)dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(D),$$

wobei

$$\tilde{k} = \begin{cases} k_2 & \text{in } D_1\\ k_1 & \text{in } D_2\end{cases}.$$

Ausnutzung der Gleichung $\Delta u + k^2\,u = 0$ in $D_1 \cup D_2$ und der zweiten Green'schen Identität (mit $u = f$) ergibt

$$\int_D \left(\tilde{k}\,\nabla\tilde{u}\cdot\nabla v - \tilde{k}\,k^2\,u\,v + \nabla f\cdot\nabla v\right)dx = \int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial\nu}\,v\,ds \quad \forall v \in C_0^\infty(D). \tag{3}$$

Damit die variationelle Formulierung (3) formal Sinn macht, braucht man das Verhalten von $\tilde{u}$ auf einer Nullmenge von D (speziell Γ) nicht einschränken. Da jedoch $[\gamma_D^{\bullet} u]_\Gamma = 0$ vorausgesetzt wird, wählen wir $H^1(D)$ als Ansatzraum zur Lösung von (3) und entsprechen damit nach Teil (i) dieser Transmissionsbedingung. Da $C_0^\infty(D)$ dicht in $H_0^1(D)$ bzgl. der H^1-Norm liegt, gilt (3) für alle $v \in H_0^1(D)$.

Wir erfüllen also die Problemstellung (im schwachen Sinn) teils explizit durch geeignete Wahl des Ansatzraumes für $\tilde{u}$ und teils implizit durch die Forderung (3).