Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Tilo Arens / Dipl.-Math. Kai Sandfort

zum Übungsblatt 8 "Streuprobleme"

Lösung zur 13. Aufgabe:

(i) Wie für Aufgabenteil 12 (ii) beschrieben, erfüllen wir auch hier einen Teil des Problems (im schwachen Sinn) durch geeignete Wahl des Ansatzraumes. Wir verwenden die Operatoren γ_D und γ_N. Der Operator γ_D wurde in Satz 4.7 der Vorlesung definiert, und die Fortsetzung $\gamma_D : H^s(D) \to H^{s-1/2}(\partial D)$ in Satz 4.9 als beschränkt gezeigt. Der Operator γ_N wurde in Satz 4.13 definiert, und die Beschränktheit von $\gamma_N : H^1(D) \to H^{-1/2}$ in Satz 4.14 bewiesen. Die Forderung

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$$

wird für eine schwache Lösung des Problems (1) zu

$$\gamma_D u = \gamma_N u = 0. \tag{1}$$

In Bemerkung (ii) nach Def. 4.12 der Vorlesung wurde der Raum $H_0^1(D)$ als $H_0^1(D) = \{u \in H^1(D) : \gamma_D u = 0\}$ identifiziert. Es gilt entsprechend

$$H_0^2(D) = \{u \in H^2(D) : \gamma_D u = \gamma_D \mathcal{D}^\alpha u = 0 \text{ für } |\alpha| = 1\},$$

wobei $\mathcal{D}^\alpha$ die schwache Ableitung der Ordnung α bezeichnet. Zum Zusammenhang zwischen klassischen und schwachen Spur- und Normalenableitungsoperatoren siehe Satz 4.7 und die Bemerkung nach Satz 4.13. Für $u \in H_0^2(D)$ gilt $\gamma_N u = 0$. Die Randbedingungen (1) sind also im Ansatzraum $H_0^2(D)$ integriert.
Seien nun $u, v \in H_0^2(D)$ und damit insb. die Voraussetzungen von Satz 4.13 (1. Green'sche Identität in Sobolev-Räumen) erfüllt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_D (\nabla u \cdot \nabla v + \Delta u\, v)\, dx &= \langle \gamma_D v, \gamma_N u \rangle \\
&= 0 \\
&= \langle \gamma_D u, \gamma_N v \rangle = \int_D (\nabla v \cdot \nabla u + \Delta v\, u)\, dx.
\end{aligned}$$

Aus der 1. Green'schen Identität folgt unmittelbar die 2. Identität

$$\int_D (\Delta u\, v - \Delta v\, u)\, dx = \langle \gamma_D v, \gamma_N u \rangle - \langle \gamma_D u, \gamma_N v \rangle = 0 \quad \forall v \in H_0^2(D).$$

Für $\tilde{u}, \tilde{v} \in C_0^\infty(D)$ haben wir als Sonderfall

$$\int_D \Delta^2 \tilde{u}\, \tilde{v}\, dx = \int_D \Delta \tilde{u}\, \Delta \tilde{v}\, dx = \int_D \tilde{u}\, \Delta^2 \tilde{v}\, dx.$$

Da $C_0^\infty(D)$ in $H_0^2(D)$ dicht bzgl. der H^2-Norm liegt, verstehen wir

$$\int_D \Delta^2 u\, v\, dx = \int_D \Delta u\, \Delta v\, dx = \int_D u\, \Delta^2 v\, dx \tag{2}$$

auch für $u, v \in H_0^2(D) \Rightarrow \Delta u, \Delta v \in L^2(D)$ mit $\Delta^2 u, \Delta^2 v$ im „schwachen“ Sinn. Es ist jedoch zu beachten, dass die Bezeichung „schwach“ (mit $\Delta = \mathcal{D}^{2e_1} + \mathcal{D}^{2e_2}$) nicht unmittelbar aus (2) und Def. 4.1 folgt, da $\Delta^2 u \notin L^2(D)$. Nach (2) ist dann mit $u \in H_0^2(D)$ die schwache Formulierung

$$\int_D \Delta^2 u\, \tilde{v}\, dx = \int_D f\, \tilde{v}\, dx \quad \forall \tilde{v} \in C_0^\infty(D)$$

des Problems (1) äquivalent zu

$$\int_D \Delta u\, \Delta v\, dx = \int_D f\, v\, dx \quad \forall v \in H_0^2(D). \tag{3}$$

Wichtig zu verstehen ist, dass jede klassische Lösung zum Problem (1) die Forderung (3) erfüllt, und eine Lösung $u \in H_0^2(D)$ zu (3) für genügend hohe Regularität von u und f eine klassische Lösung zum Problem (1) darstellt. Letztgenanntes folgt mit (3) und der Dichtheit von $C_0^\infty(D) \subset H_0^2(D)$ in einem passenden Ansatzraum für u bzgl. der L^2-Norm.

(ii) Wir zeigen, dass wir den Satz von Lax/Milgram anwenden können, aus dem die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung zum Problem (1) für jedes $f \in L^2(D)$ folgt. Hierzu definieren wir mit $X := H_0^2(D)$ die Sesquilinearform

$$\mathcal{A}(u, v) := \int_D \Delta u\, \Delta \overline{v}\, dx$$

auf $X \times X$ und die Antilinearform

$$\mathcal{B}(v) := \int_D f\, \overline{v}\, dx$$

auf X. Damit können wir die schwache Formulierung (3) schreiben als

$$\mathcal{A}(u,v) = \mathcal{B}(v) \quad \forall v \in X.$$

Es gelten nun

$$|\mathcal{B}(v)| \le \int_D |f\,\overline{v}|\,dx \overset{\text{Hölder}}{\le} \|f\|_{L^2(D)}\,\|v\|_{L^2(D)} \le \|f\|_{L^2(D)}\,\|v\|_X$$

und

$$|\mathcal{A}(u,v)| \le \int_D |\Delta u|\,|\Delta v|\,dx \overset{\text{Hölder}}{\le} \|\Delta u\|_{L^2(D)}\,\|\Delta v\|_{L^2(D)} \le \|u\|_X\,\|v\|_X.$$

Für den Beweis der strikten Koerzivität von $\mathcal{A}$ verwenden wir folgende Beziehung, Details siehe [1] und [2]. Mit $\sigma \in (0,1)$ definieren wir

$$\tilde{\mathcal{A}}(u) := \int_D \left(|\Delta u|^2 - 2\,(1-\sigma)\left(\mathrm{Re}(\mathcal{D}^{(2,0)}u\,\mathcal{D}^{(0,2)}u) - |\mathcal{D}^{(1,1)}u|^2\right)\right) dx.$$

Mittels partieller Integration folgt

$$\mathcal{A}(u,u) = \int_D |\Delta u|^2\,dx = \tilde{\mathcal{A}}(u).$$

Einfaches Rechnen führt zu

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{A}}(u) &= \int_D \left(|\mathcal{D}^{(2,0)}u|^2 + |\mathcal{D}^{(0,2)}u|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\mathcal{D}^{(2,0)}u\,\mathcal{D}^{(0,2)}u\right) dx - \\
&\quad - \int_D \left(2\,(1-\sigma)\,\mathrm{Re}(\mathcal{D}^{(2,0)}u\,\mathcal{D}^{(0,2)}u) + 2\,(1-\sigma)\,|\mathcal{D}^{(1,1)}u|^2\right) dx \\
&\overset{(\star)}{\ge} \int_D \left((1-\sigma)\left(|\mathcal{D}^{(2,0)}u|^2 + |\mathcal{D}^{(0,2)}u|^2\right) + 2\,(1-\sigma)\,|\mathcal{D}^{(1,1)}u|^2\right) dx \\
&\ge (1-\sigma) \sum_{|\alpha|=2} \|\mathcal{D}^\alpha u\|^2_{L^2(D)},
\end{aligned} \tag{4}$$

wobei wir für $(\star)$ ausgenutzt haben, dass $2\,\mathrm{Re}(a\,b) \ge -(|a|^2 + |b|^2)$ für beliebige $a, b \in \mathbb{C}$.
Wir verwenden nun folgenden Spezialfall der sehr wichtigen Ungleichung von Friedrichs, um die Norm von schwachen Ableitungstermen abzuschätzen.

Friedrichs' **Ungleichung**:
Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit Durchmesser d und $u \in H_0^k(D)$. Dann gilt

$$\|u\|_{L^2(D)} \le d^k \left(\sum_{|\alpha|=k} \|\mathcal{D}^\alpha u\|^2_{L^2(D)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Aus (5) folgen mit $k = 2$ und $k = 1$ die Ungleichungen

$$\|u\|^2_{L^2(D)} \leq d^4 \sum_{|\alpha|=2} \|\mathcal{D}^\alpha u\|^2_{L^2(D)}, \tag{6}$$

$$\|\mathcal{D}^\beta u\|^2_{L^2(D)} \leq d^2 \sum_{|\alpha|=1} \|\mathcal{D}^\alpha \mathcal{D}^\beta u\|^2_{L^2(D)} \leq d^2 \sum_{|\alpha|=2} \|\mathcal{D}^\alpha u\|^2_{L^2(D)} \text{ für } |\beta| = 1 \tag{7}$$

Schließlich gibt es wegen (4), (6) und (7) ein $\tilde{c} > 0$, so dass

$$|\mathcal{A}(u,u)| = |\tilde{\mathcal{A}}(u)| \geq \tilde{c} \sum_{j=0}^{2} \sum_{|\alpha|=j} \|\mathcal{D}^\alpha u\|^2_{L^2(D)} = \tilde{c}\, \|u\|^2_{H^2(D)}.$$

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes von Lax/Milgram gezeigt.

Literatur

[1] Thomas C. Assiff and David H. Y. Yen, On a Penalty-Perturbation Theory for Plate Problems, IMA J. Appl. Math., 34 (1985), pp. 121-136

[2] Serge Nicaise, Polygonal Interface Problems for the Biharmonic Operator, Math. Meth. Appl. Sci., 17 (1994), pp. 21-39