Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Tilo Arens / Dipl.-Math. Kai Sandfort

Übungsblatt 8
zur Vorlesung "Streuprobleme" im WS 07/08

13. Aufgabe:
Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Gegeben sei das folgende Randwertproblem für die biharmonische Gleichung:

$$\left.\begin{array}{rcll} \Delta^2 u &=& f & \text{in } D,\ f \in L^2(D), \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} &=& 0 & \text{on } \partial D. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

(i) Zeigen Sie, dass eine Funktion $u \in H_0^2(D)$ eine schwache Lösung von (1) ist, wenn

$$\int_D \Delta u\, \Delta v\, dx = \int_D f\, v\, dx \quad \forall v \in H_0^2(D).$$

(ii) Beweisen Sie, dass (1) für beliebiges $f \in L^2(D)$ eine eindeutige schwache Lösung besitzt.

14. Aufgabe:
In der Vorlesung haben Sie den Satz von Lax/Milgram besprochen, der unter geg. Voraussetzungen die Existenz und Eindeutigkeit eines Variationsproblems sicherstellt. Wir wollen nun den verwandten Satz von Lions beweisen, der die Existenz einer Lösung einer Variationsgleichung noch unter schwächeren Voraussetzungen gewährleistet.

Satz von Lions: Sei H ein Hilbertraum, V ein beliebiger Unterraum von H. Auf V sei ein Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_V$ definiert, die dadurch induzierte Norm sei mit $\|\cdot\|_V$ bezeichnet. Ferner sei E eine auf $H \times V$ definierte Bilinearform, l eine auf V stetige Linearform. Weiterhin seien folgende drei Eigenschaften erfüllt:

$$\begin{array}{rrcl} \exists c_1 > 0\ \forall v \in H: & \|v\|_H & \leq & c_1 \|v\|_V, \\ \forall v \in V\ \exists c(v) \geq 0\ \forall u \in H: & |E(u,v)| & \leq & c(v)\, \|u\|_H, \\ \exists c_2 > 0\ \forall v \in V: & |E(v,v)| & \geq & c_2 \|v\|_V^2. \end{array}$$

Dann existiert ein $u \in H$, welches die Variationsgleichung

$$E(u,v) = l(v) \quad \forall v \in V$$

erfüllt.