Übungsblatt 9
zur Vorlesung "Streuprobleme" im WS 07/08

15. Aufgabe:
Seien X ein Hilbertraum und $A : X \to X$ ein injektiver, beschränkter, linearer Operator. Wir betrachten das Problem

$$Au = w \text{ für ein } w \in X. \tag{1}$$

Weiterhin seien $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Unterräumen $X_n \subset X$ mit $\dim X_n = n$ und $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der zugehörigen orthogonalen Projektoren $P_n : X \to X_n$.
Überlegen Sie, warum die Äquivalenz

$$\langle Au_n, v\rangle = \langle w, v\rangle \ \forall v \in X_n \quad \Leftrightarrow \quad P_n(Au_n - w) = 0$$

gilt.
Nun gebe es einen Index N, so dass für jedes $w \in \mathcal{R}(A)$ und $n \geq N$ die Gleichung $P_n(Au_n - w) = 0$ eine eindeutige Lösung $u_n \in X_n$ besitzt und $u_n \to u$ für $n \to \infty$ mit u aus (1). Zeigen Sie, dass für

$$\|A_n^{-1}P_nA\| \leq M, \quad A_n := P_nA : X_n \to X_n, \quad n \geq N,$$

die folgende Fehlerabschätzung gilt:

$$\|u_n - u\| \leq (1 + M) \inf_{\tilde{u}\in X_n} \|\tilde{u} - u\|.$$

Bem.: Für $\{X_n\}_{n\geq N}$, $X_n \subset X$, heißt $(A, w) \mapsto u_n$ *Galerkin-Verfahren* zur Lösung von (1). Es ist ein *Projektionsverfahren.*

16. Aufgabe:
Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine 2π-periodische, stetige Funktion mit $\sup_{x\in[0,2\pi]} f(x) < h$ und

$$\Gamma_h := \{x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 2\pi,\ x_2 = h\}.$$

Weiterhin bezeichne $u : R_h \to \mathbb{C}$ mit $R_h := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > h\}$ eine α-quasi-periodische Funktion mit $\alpha \in \mathbb{R} \times \{0\}$, d.h.

$$u(x + 2\pi\,(z, 0)^T) = e^{2\pi\, i\, \alpha_1 z} u(x), \quad x \in R_h,\ z \in \mathbb{Z},$$

die die Helmholtz-Gleichung $\Delta u + k^2\, u = 0$ und die Abstrahlbedingung (UPRC) in R_h erfüllt. Dazu seien Λ der Dirichlet-zu-Neumann-Operator auf Γ_h und u_ν, $\nu \in \mathbb{Z}$, die Fourier-Koeffizienten von $exp(-i\,\alpha \cdot x)\, u(x)$.
Zeigen Sie die Beziehungen

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{\Gamma_h} \overline{u}\, \Lambda u\, ds &= -2\pi \sum_{\beta_\nu \in i\,\mathbb{R}^+} |\beta_\nu|\, |u_\nu|^2, \\ \operatorname{Im} \int_{\Gamma_h} \overline{u}\, \Lambda u\, ds &= 2\pi \sum_{\beta_\nu \in \mathbb{R}_0^+} |\beta_\nu|\, |u_\nu|^2, \end{aligned}$$

mit

$$\beta_\nu := \begin{cases} \sqrt{k^2 - |\alpha_\nu|^2}, & |\alpha_\nu| \le k \\ i\sqrt{|\alpha_\nu|^2 - k^2}, & |\alpha_\nu| > k \end{cases}, \quad \alpha_\nu := \alpha + (\nu, 0), \quad \nu \in \mathbb{Z}.$$

Zusatz: Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\arg \zeta \in (0, \pi/2)$. Überlegen Sie, wie

$$-\operatorname{Re} \int_{\Gamma_h} \overline{u}\, \Lambda(\zeta\, u)\, ds$$

nach unten abgeschätzt werden kann.