Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Tilo Arens / Dipl.-Math. Kai Sandfort

Lösung zum Übungsblatt 10 "Streuprobleme"

Lösung zur 17. Aufgabe:

(i) Für $\psi \in H^{-1/2}(\partial D)$ ist $\gamma_D^* \psi$ definiert durch

$$\langle \varphi, \gamma_D^* \psi \rangle = \langle \gamma_D \varphi, \psi \rangle_{\partial D} \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \supset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Es ist $\gamma_D \varphi$ insb. in $H^{1/2}(\partial D)$. Für $\gamma_D^* \psi \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^N)$ bleibt zu zeigen, dass $\gamma_D^* \psi$ kompakten Träger hat. Dies ist einfach zu sehen wegen

$$\langle \gamma_D \varphi, \psi \rangle_{\partial D} = \int_{\partial D} \varphi \, \overline{\psi} \, ds = 0 \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \text{ mit } \operatorname{supp} \varphi \cap \partial D = \emptyset.$$

Die Distribution $\gamma_D^* \psi$ hat also einen kompakten Träger $K \subseteq \partial D$, wobei ∂D kompakt ist (D ist beschränktes Lipschitz-Gebiet).

(ii) Für $\psi \in L^1(\partial D)$ ist $\gamma_N^* \psi$ definiert durch

$$\langle \varphi, \gamma_N^* \psi \rangle = \langle \gamma_N \varphi, \psi \rangle_{\partial D} = \langle \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, \psi \rangle_{\partial D} \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \supset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Es ist $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \in L^\infty(\partial D)$ für $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Für $\gamma_N^* \psi \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^N)$ bleibt zu zeigen, dass $\gamma_N^* \psi$ kompakten Träger hat. Dies ist einfach zu sehen wegen

$$\langle \gamma_N \varphi, \psi \rangle_{\partial D} = \int_{\partial D} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, \overline{\psi} \, ds = 0 \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \text{ mit } \operatorname{supp} \varphi \cap \partial D = \emptyset.$$

Die Distribution $\gamma_N^* \psi$ hat also einen kompakten Träger $K \subseteq \partial D$.

Lösung zur 18. Aufgabe:
Die Aussage

$$\mathcal{N}(\Delta + k^2)\, u = -u \quad \text{in } \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^N) \tag{1}$$

ist gleichbedeutend zu

$$\langle \mathcal{N}(\Delta + k^2)\, u, \varphi \rangle = \langle u, (\Delta + k^2)\, \mathcal{N}^* \varphi \rangle = -\langle u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Wir zeigen also

$$-\varphi = (\Delta + k^2)\,\mathcal{N}^*\varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \tag{2}$$

mit

$$\mathcal{N}^*\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\Phi(y,\cdot)}\,\varphi(y)\,dy.$$

Zunächst bemerken wir, dass Φ die gleiche Singularität in $x = y$ besitzt wie Fundamentallösungen zur Laplace-Gleichung, z.B.

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|} + \text{const.} + \mathcal{O}(|x-y|^{-2}) \quad \text{im } \mathbb{R}^3,$$

siehe Definition 2.2 und die anschließende Bemerkung. Allgemein gilt im $\mathbb{R}^N$ mit $N > 2$:

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{N(N-2)\,\omega_N}|x-y|^{2-N} + \text{const.} + \mathcal{O}(|x-y|^{1-N}),$$

wobei ω_N das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^N$ ist.
Um (2) zu zeigen, müssen wir diese Singularität in geeigneter Weise handhaben, vgl. auch den Beweis zum Green'schen Darstellungssatz 2.3. Dazu sei zunächst $\eta_\varepsilon \in C^2(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$, mit

$$\eta_\varepsilon(x) := 0 \text{ für } |x| \le \varepsilon, \quad \eta_\varepsilon(x) := 1 \text{ für } |x| \ge 2\varepsilon.$$

Wir definieren nun

$$\tilde\Phi_\varepsilon(\cdot,y) := \overline{\Phi(y,\cdot)}\,\eta_\varepsilon(|\cdot - y|), \quad \mathcal{N}_\varepsilon^*\varphi := \int_{\mathbb{R}^N} \tilde\Phi_\varepsilon(\cdot,y)\,\varphi(y)\,dy.$$

Da der Integrand in der Definition von $\mathcal{N}_\varepsilon^*\varphi$ über $\mathbb{R}^N$ absolut integrabel ist und $\overline{\Phi(y,\cdot)} \in C^\infty(\mathbb{R}^N \backslash \{y\})$, können wir Differentiation und Integration vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned}
&((\Delta + k^2)\,\mathcal{N}_\varepsilon^*\varphi)(x) \\
= &\int_{\operatorname{supp}\varphi} (\Delta_x + k^2)\tilde\Phi_\varepsilon(x,y)\,\varphi(y)\,dy \\
= &\int_{B_R(x)} (\Delta_x + k^2)\tilde\Phi_\varepsilon(x,y)\,\varphi(y)\,dy \\
= &\int_{B_R(x)} (\Delta_x + k^2)\tilde\Phi_\varepsilon(x,y)\,(\varphi(y) - \varphi(x))\,dy + \varphi(x)\int_{B_R(x)} (\Delta_x + k^2)\tilde\Phi_\varepsilon(x,y)\,dy
\end{aligned}$$

mit $R > 0$, so dass $\operatorname{supp} \varphi \subset B_R(x)$. Man kann zeigen:

$$\begin{aligned}
((\Delta + k^2)\,\mathcal{N}^*\varphi)(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_R(x)} (\Delta_x + k^2)\tilde{\Phi}_\varepsilon(x,y)\,(\varphi(y) - \varphi(x))\,dy + \\
&\quad + \varphi(x) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_R(x)} (\Delta_x + k^2)\tilde{\Phi}_\varepsilon(x,y)\,dy.
\end{aligned}$$

Da $(\Delta_x + k^2)\,\overline{\Phi(y,x)} = 0$ für $x \neq y$, gilt

$$((\Delta + k^2)\,\mathcal{N}^*\varphi)(x) = \varphi(x) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_R(x)} (\Delta_x + k^2)\tilde{\Phi}_\varepsilon(x,y)\,dy.$$

Wegen $\tilde{\Phi}_\varepsilon(x,\cdot)|_{B_R(x)} \in C^2(B_R(x)) \cap C^1(\partial B_R(x))$ können wir schließlich die 2. Green'sche Identität anwenden mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned}
&((\Delta + k^2)\,\mathcal{N}^*\varphi)(x) \\
= \;& \varphi(x) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_R(x)} \nu(y) \cdot \nabla_x \tilde{\Phi}_\varepsilon(x,y)\,ds(y) \\
= \;& \varphi(x)\,\frac{1}{N(N-2)\,\omega_N} \lim_{R \to +\infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_R(x)} (2 - N)\,\frac{1}{R^{N-1}}\,\frac{y - x}{R}\,ds(y) \\
= \;& \varphi(x)\,\frac{1}{N\,\omega_N\,R^{N-1}} \lim_{R \to +\infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_R(x)} \nu(y) \cdot (-\nu(y))\,ds(y) \\
= \;& -\varphi(x).
\end{aligned}$$

Damit ist (1) bewiesen.