Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Tilo Arens / Dipl.-Math. Kai Sandfort

Lösung zum Übungsblatt 11 “Streuprobleme”

Lösung zur 19. Aufgabe:

(a) Zunächst setzen wir

$$\tilde{u}^{(\pm)} := \begin{cases} u & \text{in } D^{\pm} \\ 0 & \text{in } D^{\mp} \end{cases},$$

d.h. wir setzen u im Innen- bzw. im Außenraum durch 0 fort. In der Notation von Satz 5.3 ist $f^+ = f^- = 0$. Ausgehend von der Formel

$$\tilde{u}^{(\pm)} = -\mathcal{N}\tilde{f} + \mathcal{N}\gamma_N^*[\gamma_D\tilde{u}^{(\pm)}]_{\partial D} - \mathcal{N}\gamma_D^*[\gamma_N\tilde{u}^{(\pm)}]_{\partial D}$$

mit $\tilde{f} := f^+ + f^-$ erhalten wir für das äußere bzw. das innere Dirichlet-Problem

$$\tilde{u}^{(\pm)} = \pm\mathcal{N}\gamma_N^* f - \mathcal{N}\gamma_D^*[\gamma_N\tilde{u}^{(\pm)}]_{\partial D}.$$

Daraus folgen nach Anwendung von γ_D^+ bzw. γ_D^- die Operatorgleichungen

$$\begin{aligned} f &= \pm\,\gamma_D^{\pm}\mathcal{N}\gamma_N^* f - \gamma_D^{\pm}\mathcal{N}\gamma_D^*[\gamma_N\tilde{u}^{(\pm)}]_{\partial D} \\ &= \pm\,\gamma_D^{\pm}\,\mathrm{DL}\,f - \gamma_D^{\pm}\,\mathrm{SL}\,[\gamma_N\tilde{u}^{(\pm)}]_{\partial D} \end{aligned}$$

für die Dichten. Durch analoges Vorgehen und Anwendung von $\gamma_N^{\pm}$ zeigt man für das äußere bzw. das innere Neumann-Problem die Operatorgleichungen

$$g = \gamma_N^{\pm}\,\mathrm{DL}\,[\gamma_D\tilde{u}^{(\pm)}]_{\partial D} \mp \gamma_N^{\pm}\,\mathrm{SL}\,g.$$

(b) Für das äußere bzw. das innere Dirichlet-Problem erhalten wir mit $u = \mathrm{SL}\,\varphi$ aus

$$\begin{aligned} \gamma_D^+u + \gamma_D^-u &= 2\,S\varphi \\ \text{und} \qquad [\gamma_D u]_{\partial D} &= 0 \end{aligned}$$

die Operatorgleichung

$$2\,\gamma_D^{\pm}u = 2\,S\varphi \quad \Leftrightarrow \quad f = S\varphi$$

mit $f = \gamma_D^+ u$ bzw. $f = \gamma_D^- u$. Auf die gleiche Weise erhalten wir aus den jeweiligen Operatordefinitionen und Sprungbeziehungen die Gleichungen

$$2\,\gamma_D^{\pm} u = 2\,K\psi \pm \psi \quad \Leftrightarrow \quad f = (K \pm 1/2\,\mathrm{Id})\,\psi$$

mit $u = \mathrm{DL}\,\psi$ für das äußere bzw. das innere Dirichlet-Problem,

$$g = (\tilde{K} \mp 1/2\,\mathrm{Id})\,\varphi$$

mit $u = \mathrm{SL}\,\varphi$ und $g = \gamma_N^{\pm} u$ für das äußere bzw. das innere Neumann-Problem sowie

$$g = T\psi$$

mit $u = \mathrm{DL}\,\psi$ für das äußere bzw. das innere Neumann-Problem.

Lösung zur 20. Aufgabe:
Nach Def. 5.2 und Satz 5.6 der Vorlesung ist der Einfachschichtpotential-Operator SL eine Abbildung $\mathrm{SL} = \mathcal{N}\gamma_D^* : H^{-1/2}(\partial D) \to \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^N)$. Nach Satz 5.11 gilt

$$\chi\,\mathrm{SL} : H^{-1/2}(\partial D) \to H^1(\mathbb{R}^N) \quad \text{für } \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{1}$$

(vgl. Satz 6.11 in McLean '00). Die Distribution $\mathrm{SL}\,\psi$ mit $\psi \in H^{-1/2}(\partial D)$ genügt nach Satz 5.10 der Helmholtz-Gleichung, d.h.

$$(\Delta + k^2)\ \mathrm{SL}\,\psi = 0 \quad \text{in } D^- \text{ und } D^+.$$

Wir wählen eine Funktion χ mit kompaktem Träger und setzen $u := \chi\,\mathrm{SL}\,\psi$. Um die Formel aus Satz 5.3 anwenden zu können, fordern wir außerdem, dass χ in einer Umgebung von ∂D konstant gleich 1 ist. Offensichtlich hat $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ einen kompakten Träger und erfüllt die Helmholtz-Gleichung insb. in $M := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \chi(x) = 1\}^\circ$. Aus (1) folgt weiterhin $u|_M \in H^1(M)$. Es sei $\overline{D^-} \subset M$. Nach Satz 5.6 gilt

$$(\Delta + k^2)\,u = (\Delta + k^2)\,\mathcal{N}\gamma_D^*\psi = -\gamma_D^*\psi \quad \text{in } \mathcal{D}^*(M)$$

(vgl. (6.18) in McLean '00). Wir können nun Satz 5.3 auf unseren Fall übertragen mit $D^+ = M \backslash \overline{D^-}$ und $f = f^+ = f^- = 0$. Danach erhalten wir die Beziehung

$$-\gamma_D^*\psi = 0 - \gamma_N^*[\gamma_D u]_{\partial D} + \gamma_D^*[\gamma_N u]_{\partial D} \quad \text{in } \mathcal{D}^*(M),$$

die äquivalent zur Aussage ist.