Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Tilo Arens / Dipl.-Math. Kai Sandfort

Lösung zum Übungsblatt 12 "Streuprobleme"

Lösung zur 21. Aufgabe:

(i) Bei der Eigenwertbestimmung für eine Kreisscheibe liegt es nahe, in Polarkoordinaten zu transformieren und zu separieren. Hierzu siehe das Beispiel 1.3 aus der Vorlesung. Dort wurde für den radialen Anteil die Bessel'sche D.gl. mit $z = k\,r$ hergeleitet. Bezeichnen $z_m^{(n)}$, $m \in \mathbb{N}$, die Nullstellen aller Lösungen der Ordnung $n \in \mathbb{Z}$ dieser D.gl., so sind die Dirichlet-Eigenwerte von $-\Delta$ in K also gegeben durch $k_m^{(n)} = z_m^{(n)}/r$.

(ii) Für die Eigenwertbestimmung für das Rechteck machen wir den Separationsansatz

$$u(x) = u_1(x_1)\,u_2(x_2). \tag{1}$$

Die Laplace-Gleichung wird damit zu

$$u_2(x_2)\,\frac{d^2}{dx_1^2}u_1(x_1) + u_1(x_1)\,\frac{d^2}{dx_2^2}u_2(x_2) + k^2\,u_1(x_1)\,u_2(x_2) = 0.$$

Wir schreiben dies für $u(x) \neq 0$ als

$$\frac{u_1''}{u_1}(x_1) + \frac{u_2''}{u_2}(x_2) + k^2 = 0.$$

Da der erste Funktionsterm nur von x_1 abhängt und der zweite nur von x_2, müssen beide Terme konstant sein, also

$$\frac{u_1''}{u_1}(x_1) = c = -\frac{u_2''}{u_2}(x_2) - k^2, \quad u(x) \neq 0,\, c \in \mathbb{C}.$$

Das gegebene Neumann-Randwertproblem im 2D (partielle D.gl.) entkoppelt damit zu folgenden beiden Neumann-Randwertproblemen im 1D (gewöhnliche D.gl.en):

$$\begin{aligned} u_1'' - c\,u_1 &= 0 \qquad \text{in } [-a,a], \qquad -u_1'(-a) = u_1'(a) = 0 \\ u_2'' + (c+k^2)\,u_2 &= 0 \qquad \text{in } [-b,b], \qquad -u_2'(-b) = u_2'(b) = 0 \end{aligned}.$$

Mit dem Ansatz

$$u_1(x) = d_1 \sin(A_1 x) + e_1 \cos(B_1 x) \tag{2}$$

erhalten wir aus dem RWP für u_1 die Lösungen mit

$$\begin{aligned} & c = -A_1^2 = -\left(\left(\frac{2n_1+1}{2}\right)\frac{\pi}{a}\right)^2 \quad \wedge \quad e_1 = 0 \\ \text{oder} \qquad & c = -B_1^2 = -\left(n_2\,\frac{\pi}{a}\right)^2 \quad \wedge \quad d_1 = 0, \end{aligned}$$

wobei $n_1,\, n_2 \in \mathbb{N}_0$. Entsprechend führt das RWP für u_2 mit

$$u_2(x) = d_2 \sin(A_2 x) + e_2 \cos(B_2) \tag{3}$$

zu

$$\begin{aligned} & k^2 = A_2^2 - c \quad \wedge \quad e_2 = 0 \\ \text{oder} \qquad & k^2 = B_2^2 - c \quad \wedge \quad d_2 = 0, \end{aligned}$$

wobei

$$A_2 = \left(\frac{2n_3+1}{2}\right)\frac{\pi}{b}, \qquad B_2 = n_4\,\frac{\pi}{b}, \qquad n_3,\, n_4 \in \mathbb{N}_0.$$

Daraus ergibt sich, dass die Werte k mit

$$k^2 \in \{A_1^2 + A_2^2,\, A_2^2 + B_1^2,\, A_1^2 + B_2^2,\, B_1^2 + B_2^2 \mid n_1,\, n_2,\, n_3,\, n_4 \in \mathbb{N}_0\}$$

Neumann-Eigenwerte von $-\Delta$ in R sind. Die dazugehörigen Eigenfunktionen sind aus den obigen Koeffizienten und den Ansätzen (1), (2), (3) zu berechnen. Man beachte, dass sich über die Ansätze möglicherweise nicht alle Lösungen des jeweiligen RWPs erreichen lassen. Dies bleibt nachzuprüfen.

Lösung zur 22. Aufgabe:

(i) **„⇒“**: Sei k^2 ein Neumann-Eigenwert von $-\Delta$ in D und $v \in H^1(D)$ eine zugehörige Eigenfunktion im schwachen Sinn. Setze

$$w := \begin{cases} v & \text{in } D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Funktion w hat kompakten Träger, nach Satz 5.7 gilt somit

$$\begin{aligned} w &= \mathrm{DL}\,[\gamma_D w]_{\partial D} - \mathrm{SL}\,[\gamma_N w]_{\partial D} \\ &= -\,\mathrm{DL}\,\gamma_D^- v. \end{aligned}$$

Aus $0 = \gamma_N^- v = \gamma_N^- w = -\gamma_N^- \operatorname{DL} \gamma_D^- v = -T\gamma_D^- v$ erhalten wir $\gamma_D^- v \in \ker(T)$. Es ist $\gamma_D^- v \neq 0$, da sonst $v \equiv 0$ in D. Damit ist T nicht injektiv.

„$\Leftarrow$“: Sei k^2 kein Neumann-Eigenwert von $-\Delta$ in D. Für $\psi \in \ker(T)$ setze $v := \operatorname{DL}\psi$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Delta v + k^2 v &= 0 \qquad \text{in } D \\ \gamma_N^- v = T\psi &= 0 \qquad \text{auf } \partial D. \end{aligned}$$

Daraus folgt $v \equiv 0$ in D. Da das äußere Neumann-RWP stets eindeutig lösbar ist (vgl. Thm. 3.10 in Colton/Kress ’98), folgt auch $v = \operatorname{DL}\psi \equiv 0$ in D^+. Schließlich gilt $\psi = [\gamma_D \operatorname{DL}\psi]_{\partial D} = 0$, somit ist T injektiv.

(ii) Wähle $v = \operatorname{DL}\psi$. Dann ist v eine schwache Lösung des inneren und äußeren Neumann-Problems. Mit der Notation aus Def. 5.15 erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^-(v,v) &= \langle \gamma_N^- v, \gamma_D^- v\rangle_{\partial D} \\ \mathcal{A}^+(v,v) - \int_{\partial B(0,R)} \overline{v}\,\Lambda v\, ds &= -\langle \gamma_N^+ v, \gamma_D^+ v\rangle_{\partial D}. \end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen ergibt

$$\mathcal{A}^-(v,v) + \mathcal{A}^+(v,v) - \int_{\partial B(0,R)} \overline{v}\,\Lambda v\, ds = -\langle \gamma_N v, [\gamma_D v]_{\partial D}\rangle_{\partial D} = -\langle T\psi, \psi\rangle_{\partial D}.$$

Analog zum Beweis von Satz 5.17 zeigt man

$$\operatorname{Re}\left(-\langle T\psi,\psi\rangle_{\partial D}\right) \geq c\|\psi\|^2_{H^{1/2}(\partial D)} - (k^2+1)\,\|v\|^2_{L^2(B(0,R))},$$

denn $\psi = [\gamma_D v]_{\partial D}$ und $\gamma_D^\pm$ ist stetig. Es folgt

$$\operatorname{Re}\left(-\langle T\psi,\psi\rangle_{\partial D} + (k^2+1)\,\langle \operatorname{DL}\psi, \operatorname{DL}\psi\rangle_{L^2(B(0,R))}\right) \geq c\|\psi\|^2_{H^{1/2}(\partial D)}.$$

Die zugehörige Sesquilinearform definiert also einen strikt koerzitiven Operator $C : H^{1/2}(\partial D) \to H^{-1/2}(\partial D)$. Der Operator $K := -T - C$ mit

$$\langle K\psi_1, \psi_2\rangle_{\partial D} = -(k^2+1)\,\langle \operatorname{DL}\psi_1, \operatorname{DL}\psi_2\rangle_{L^2(B(0,R))}$$

ist kompakt, da die Einbettungen $H^1(D) \hookrightarrow L^2(D)$ und $H^1(D_A) \hookrightarrow L^2(D_A)$ gemäß des Satzes von Rellich/Kondrachov kompakt sind (siehe die Abbildungseigenschaften von DL in Satz 5.11). Damit ist die Behauptung bewiesen.