Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Tilo Arens / Dipl.-Math. Kai Sandfort

Lösung zum Übungsblatt 13 “Streuprobleme”

Lösung zur 23. Aufgabe:

(i) Aus (1) folgt für $x = \tilde{u} \in U$ und $u = \tilde{u}$ unmittelbar $P\tilde{u} = \tilde{u}$ für alle $\tilde{u} \in U$. Für den Beweis der angegebenen Gleichheit seien $x \in X$, $u \in U$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\|x - Px\|^2 &\overset{(1)}{\leq} \|x - \underbrace{Px - \alpha\, u}_{\in U}\|^2 \\ &= \|x - Px\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(\overline{\alpha}\langle x - Px, u\rangle) + |\alpha|^2\|u\|^2.\end{aligned}$$

Wir wählen nun $\alpha := \langle x - Px, u\rangle / \|u\|^2$ und erhalten

$$\|x - Px\|^2 \leq \|x - Px\|^2 - 2\frac{|\langle x - Px, u\rangle|^2}{\|u\|^2} + \frac{|\langle x - Px, u\rangle|^2}{\|u\|^4}\,\|u\|^2.$$

Daraus folgt

$$|\langle x - Px, u\rangle|^2 \leq 0$$

und somit $\langle x - Px, u\rangle = 0$ für alle $x \in X$ und $u \in U$.
Seien weiterhin $y \in X$ und $\beta \in \mathbb{C}$. Für alle $u \in U$ haben wir also

$$\langle P(\beta\, x + y) - (\beta\, x + y), u\rangle = 0 \tag{1}$$

und, durch Addition der Skalarprodukte für x (multipliziert mit β) und y,

$$\langle \beta\, Px + Py - (\beta\, x + y), u\rangle = 0. \tag{2}$$

Subtraktion von (1) und (2) ergibt

$$\langle P(\beta\, x + y) - (\beta\, Px + Py), u\rangle = 0.$$

Da das erste Argument nach Def. von P und U ein Element von U ist, sehen wir für dieses spezielle u, dass $P(\beta\, x + y) = \beta\, Px + Py$. Da x, $y \in X$ und

$\beta \in \mathbb{C}$ beliebig sind, folgert Linearität von P.
Schließlich gilt

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|Px + (x - Px)\|^2 \\ &= \|Px\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x - Px, \underbrace{Px}_{\in U}\rangle + \|x - Px\|^2 \\ &\geq \|Px\|^2,\end{aligned}$$

also $\|P\| \leq 1$.
P ist damit eine wohldefinierte und orthogonale Projektion auf U.

Zusatz: Für ein $x_\perp$ im orthogonalen Komplement $U^\perp$ von U in X ist $\langle x_\perp, u\rangle = 0$ und $\langle x_\perp - Px_\perp, u\rangle = 0$ für alle $u \in U$, also $Px_\perp = 0$. Aufgrund der Abgeschlossenheit von U ist X darstellbar als $X = U \oplus U^\perp$, jedes $x \in X$ hat eine eindeutige Zerlegung $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in U$ und $x_2 \in U^\perp$. Zusammenfassend schreiben wir

$$Px = P(x_1 + x_2) = Px_1 + Px_2 = Px_1 = x_1. \tag{3}$$

(ii) Aus (3) ist $P^2 = P$ abzulesen. Daraus folgt $\|P\| \geq 1$, und mit $\|P\| \leq 1$ aus (i) dann $\|P\| = 1$.

Lösung zur 24. Aufgabe:

(i) Aus der Darstellung $P_n g = \sum_{k=0}^{n-1} g(x_{n,k})\, L_{n,k}$ folgt

$$\|P_n\|_\infty \leq \sup_{x\in G} \sum_{k=0}^{n-1} |L_{n,k}(x)|. \tag{4}$$

Aufgrund der Kompaktheit von G und der Stetigkeit der Lagrangebasis-Funktionen (für den Fall der stückweise linearen Interpolation sind dies die „Hut-Funktionen" zu $\{x_{n,k}\}_k$) finden wir ein $z \in G$, so dass

$$\sum_{k=0}^{n-1} |L_{n,k}(z)| = \max_{x\in G} \sum_{k=0}^{n-1} |L_{n,k}(x)|.$$

Außerdem gibt es ein $f \in C(G)$ mit $\|f\|_\infty = 1$, so dass

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k})\, L_{n,k}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} |L_{n,k}(z)|$$

(Überlegen Sie, warum!) Wir erhalten

$$\|P_n\|_\infty \geq \|P_n f\|_\infty \geq |(P_n f)(z)| = \max_{x\in G} \sum_{k=0}^{n-1} |L_{n,k}(x)|$$

und zusammen mit (4) dann

$$\|P_n\|_\infty = \max_{x\in G} \sum_{k=0}^{n-1} |L_{n,k}(x)|. \tag{5}$$

Die Hut-Funktionen haben die Eigenschaft

$$\sum_{k=0}^{n-1} |L_{n,k}(x)| = \sum_{k=0}^{n-1} L_{n,k}(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in G,$$

somit ist $\|P_n\|_\infty = 1$.

(ii) Wir definieren die Funktion $\lambda : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ durch

$$\lambda(x) := \sum_{k=0}^{2m-1} |L_{n,k}(x)|.$$

Diese Funktion ist gerade und hat die Periode π/m, hierzu verwende die zweite Darstellung der Lagrangebasis vom Übungsblatt. Nach (5) gilt daher

$$\|P_n\|_\infty = \max_{0\leq x\leq \pi/(2m)} \lambda(x).$$

Weiterhin läßt sich aus der Darstellung der Lagrangebasis herleiten, dass

$$\lambda(x) \leq 3 + \frac{1}{2m} \sum_{k=2}^{2m-2} \left| \cot \frac{x - x_{n,k}}{2} \right| \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2m}. \tag{6}$$

Da die Funktion $x \mapsto \cot(x/2)$ ungerade und im Intervall $(0, \pi]$ nicht-negativ und streng monoton fallend ist, und da $x_{n,1} - x \geq \pi/(2m)$ sowie $x_{n,m} - x \leq \pi$ für $0 \leq x \leq \pi/(2m)$ gilt, kann man abschätzen

$$\frac{1}{2m} \sum_{k=2}^{m} \left| \cot \frac{x - x_{n,k}}{2} \right| < \frac{1}{2\pi} \int_{x_{n,1}}^{x_{n,m}} \cot \frac{y - x}{2}\, dy < -\frac{1}{\pi} \ln \sin \frac{\pi}{4m}. \tag{7}$$

Wegen des Verlaufs der Funktion $x \mapsto \cot(x/2)$ gilt analog

$$\frac{1}{2m} \sum_{k=m+1}^{2m-2} \left| \cot \frac{x - x_{n,k}}{2} \right| < \frac{1}{2\pi} \int_{x_{n,m+1}}^{x_{n,2m-1}} \cot \frac{x - y}{2}\, dy < -\frac{1}{\pi} \ln \sin \frac{\pi}{4m}. \tag{8}$$

Mit der Ungleichung

$$\sin \frac{\pi}{4m} > \frac{1}{2m} \tag{9}$$

folgt aus (6)-(9) die Abschätzung

$$\|P_n\|_\infty < 3 + \frac{2}{\pi} \ln(2m),$$

also $\|P_n\|_\infty = \mathcal{O}(\ln n)$.

(ii) Aus der ersten Darstellung der Lagrangebasis vom Übungsblatt berechnet man

$$\int_0^{2\pi} L_{n,j}(x)\, L_{n,k}(x)\, dx = \frac{\pi}{m}\delta_{j\,k} - (-1)^{j-k}\frac{\pi}{4m^2}$$

für $j,\ k = 0, \ldots, 2m-1$. Mittels der Dreiecksungleichung können wir damit abschätzen

$$\|P_n x\|_2^2 \leq \|g\|_\infty^2 \sum_{j,k=0}^{2m-1} \left| \int_0^{2\pi} L_{n,j}(x)\, L_{n,k}(x)\, dx \right| \leq 3\pi \|g\|_\infty^2,$$

also $\|P_n\|_{C_{\mathrm{per}}(G) \to L^2(G)} \leq \sqrt{3\pi}$. Damit ist die Behauptung gezeigt.