Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Tilo Arens / Dipl.-Math. Kai Sandfort

Übungsblatt 13
zur Vorlesung "Streuprobleme" im WS 07/08

23. Aufgabe:
Sei X ein Hilbertraum und $U \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum. Sei $P : X \to U$ eine Abbildung mit

$$\|Px - x\| \leq \|u - x\| \quad \text{für alle } u \in U \tag{1}$$

(siehe die Beispiele nach Def. 6.1). Zeigen Sie:

(i) Durch (1) ist eine Projektion wohldefiniert mit

$$\langle Px - x, u \rangle = 0 \quad \text{für alle } u \in U,$$

d.h. P ist eine *orthogonale Projektion*.

(ii) Es gilt $\|P\| = 1$.

24. Aufgabe:
Es sei $\{x_{n,k}\}_k$ die Menge der Knotenpunkte eines Gitters T_n auf einem abgeschlossenen Intervall $G \subset \mathbb{R}$ zum Index n. Weiterhin sei $P_n : X \to X_n$ der Interpolationsoperator zwischen den unten angegebenen Räumen X und X_n zur Lagrangebasis $\{L_{n,k}\}_k$. Dies bedeutet

$$L_{n,k}(x_{n,j}) = \delta_{j\,k}, \quad j,\, k = 0, \ldots, n-1,$$

und P_n ist gegeben durch

$$P_n : g \in X \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} g(x_{n,k})\, L_{n,k}.$$

(i) Seien $X = C(G)$ und X_n der Raum der stückweise linearen Funktionen auf dem Gitter T_n. Zeigen Sie $\|P_n\|_\infty = 1$.

(ii) Seien $G = [0, 2\pi]$ und T_n das Gitter zu $n := 2m$, $m \in \mathbb{N}$, mit den Knotenpunkten $x_{n,k} := k\,\pi/m$, $k = 0, \ldots, 2m-1$. Außerdem seien $X = C_{\mathrm{per}}(G)$ und X_n der Raum der trigonometrischen Polynome von der Form

$$p(x) = \sum_{l=-m+1}^{m-1} \gamma_l \, e^{i\,l\,x} + \frac{\gamma_m}{2}\,(e^{i\,m\,x} + e^{-i\,m\,x}).$$

Die Lagrangebasis ist hierfür gegeben durch

$$\begin{aligned} L_{n,k}(x) &:= \frac{1}{2m}\left(1 + 2\sum_{l=1}^{m-1} \cos(l\,(x - x_{n,k})) + \cos(m\,(x - x_{n,k}))\right) \\ &= \frac{1}{2m}\, \sin(m\,(x - x_{n,k}))\, \cot \frac{x - x_{n,k}}{2} \end{aligned}$$

für $k = 0, \ldots, 2m-1$. Zeigen Sie:

- $\|P_n\|_\infty = \mathcal{O}(\ln n)$
- Stattet man X_n mit der L^2-Norm aus, so ist $\|P_n\|$ beschränkt.