

Direkte und Inverse Streuprobleme

PD Dr. Tilo Arens

Vorlesung im Sommersemester 2011

Vorbemerkungen

Dieser Text ist die Ausarbeitung meiner Vorlesung über *Direkte und Inverse Streuprobleme* aus dem Sommersemester 2011. Bei Streuproblemen handelt es sich um ein großes und vielseitiges mathematisches Gebiet, aus dem im Rahmen einer einsemestrigen Vorlesung nur wenige Punkte herausgegriffen werden können. Die Darstellung des Stoffs folgt dabei den folgenden Werken:

- David Colton, Rainer Kreß, *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, Wiley, 1983.
- David Colton, Rainer Kreß, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, 2nd Edition, Springer, 1998.
- Andreas Kirsch, Natalia Grinberg, *The Factorization Method for Inverse Problems*, Oxford University Press, 2008.
- Rainer Kreß, *Linear Integral Equations*, 2nd Edition, Springer, 1999.

Insbesondere die Beweise der vorgestellten Sätze entsprechen dem in diesen Werken dargestellten Vorgehen. An vielen Stellen wurden jedoch detailliertere Darstellungen erarbeitet, als sie in der Literatur zu finden sind.

Mein Dank gilt Monika Behrens für die Umsetzung meiner handschriftlichen Notizen in \LaTeX . Oleksandr Bondarenko möchte ich für das Korrekturlesen einiger Abschnitte und für viele hilfreiche Kommentare danken.

Karlsruhe, August 2011

Tilo Arens

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Darstellungssätze	11
3	Darstellungen durch radialsymmetrische Lösungen	25
4	Formulierung direkter Streuprobleme	41
5	Inverse Streuprobleme	63
6	Numerische Lösung von Randintegralgleichungen	85

Kapitel 1

Einführung

Das Ziel der **Streutheorie** ist die Modellierung der Ausbreitung akustischer Wellen kleiner Amplitude in einem homogenen, isotropen, reibungsfreien Fluid (\mathbb{R}^3). Dabei spielen die folgenden physikalischen Größen eine wichtige Rolle:

v	Geschwindigkeitsfeld
p	Druck
ρ	Dichte
S	spezifische Entropie

Diese Größen sind jeweils Funktionen des Orts $x \in \mathbb{R}^3$ und der Zeit $t \in \mathbb{R}$.

Aus den Grundannahmen des Modells ergeben sich folgende Konsequenzen:

- Grundannahme *kleine Amplitude*:

$$|v|, |\rho - \rho_0|, |S - S_0| \quad \text{klein}$$

Es kann ein lineares Modell zu Grunde gelegt werden. Folgende grundlegenden physikalischen Gesetze beschreiben das Modell:

- linearisierte Euler-Gleichung (Impulserhaltung)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = 0$$

- linearisierte Kontinuitätsgleichung (Massenerhalt)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot v = 0$$

– linearisierte Zustandsgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, S_0) \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Die Konstante $c^2 = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, S_0)$ hat die Einheit $\left[\frac{m^2}{s^2}\right]$, ist also das Quadrat einer Geschwindigkeit.

Hiermit erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p &= c^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -c^2 \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot v \\ &= -c^2 \rho_0 \nabla \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) \\ &= c^2 \nabla \cdot \nabla p = c^2 \Delta p. \end{aligned}$$

Hierbei wurde der *Laplace-Operator* verwendet,

$$\Delta p = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) p$$

Somit erfüllt p die **Wellengleichung**

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0.$$

Statt p betrachtet man das Geschwindigkeitspotential U mit

$$p = -\frac{\partial U}{\partial t}, \quad v = \frac{1}{\rho_0} \nabla U.$$

Auch dieses erfüllt

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \Delta U = 0.$$

- Grundannahme *zeitharmonische* Wellen: Die Zeitabhängigkeit des Potentials ist explizit bekannt,

$$U(x, t) = \operatorname{Re} \left(u(x) e^{-i\omega t} \right)$$

mit einer Frequenz $\omega > 0$. Mit der **Wellenzahl** $k = \frac{\omega}{c}$ folgt

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{1.1}$$

Die Gleichung (1.1) wird **Helmholtz-Gleichung** genannt.

Die folgenden **Ziele der Vorlesung** sollen erreicht werden:

- grundlegende Eigenschaften von Lösungen der Helmholtz-Gleichung sollen erkannt werden,
- es wird um Fragen der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Randwertproblemen zur Helmholtz-Gleichung im \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 gehen,
- Möglichkeiten zur rechnerischen Bestimmung von Lösungen sollen besprochen werden,
- **Inverse Streuprobleme** sollen formuliert und Strategien zu ihrer Lösung vorgestellt werden.

Als Einstieg wollen wir zunächst einfache **Beispiele für Lösungen** der Helmholtz-Gleichung (1.1) betrachten. Solche Beispielerhält man durch einen Separationsansatz:

$$u(x) = u_1(x_1)u_2(x_2) \cdot \dots \cdot u_n(x_n)$$

Damit ergibt sich für den Laplace-Operator angewandt auf u

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^n u_j''(x_j) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n u_l(x_l)$$

Somit erhalten wir aus der Helmholtz-Gleichung

$$0 = \frac{\Delta u(x)}{u(x)} + k^2 = \sum_{j=1}^n \frac{u_j''(x_j)}{u_j(x_j)} + k^2.$$

Variieren wir nur ein x_j und lassen die anderen Koordinaten konstant, so folgt

$$\frac{u_j''(x_j)}{u_j(x_j)} = \alpha_j, \quad x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

und

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j + k^2 = 0.$$

Lösungen der gewöhnlichen Differenzialgleichung (1.2) können direkt angegeben werden,

$$u_j(x_j) = e^{\pm \sqrt{\alpha_j} x_j}.$$

Damit ergeben sich Lösungen der Helmholtz-Gleichung als Linearkombination der Funktionen

$$u(x) = \prod_{j=1}^n e^{\pm \sqrt{\alpha_j} x_j}$$

jeweils mit $\sum_{j=1}^n \alpha_j + k^2 = 0$.

Wir betrachten einige spezielle Wahlen für die Parameter α_j .

Im Fall $\alpha_j = -k^2 d_j^2$ mit $d_j \in [-1, 1]$ gilt

$$\sum_{j=1}^n d_j^2 = 1,$$

d.h. $d = (d_1, \dots, d_n)^\top$ ist ein **Richtungsvektor**.

Definition 1.1 Eine Lösung der Helmholtzgleichung von der Form

$$u(x) = e^{ikd \cdot x}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

mit $d \in S^{n-1} = \{z \in \mathbb{R}^n : |z| = 1\}$, heißt **ebene Welle**.

Spezielle ebene Wellen erhält man für $d = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{n}}, \pm \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \pm \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^\top$. Aus der Euler'schen Formel erkennt man, dass man durch eine geeignete Linearkombination der entsprechenden ebenen Wellen die folgende Lösung erhält:

$$u(x) = \prod_{j=1}^n \sin\left(\frac{k}{\sqrt{n}} x_j\right).$$

Für $x_j = 0$ oder $x_j = \frac{\sqrt{n}\pi}{k}$ gilt $u(x) = 0$. Somit haben wir eine nichttriviale Lösung der Helmholtzgleichung mit trivialen Randwerten im Quader $\left[0, \frac{\sqrt{n}\pi}{k}\right]^n$ gefunden. Es liegt also eine **Eigenfunktion** des Laplace-Operators zum Eigenwert $-k^2$ mit homogenen Randwerten im Quader $\left[0, \frac{\sqrt{n}\pi}{k}\right]^n$ vor.

Auch in anderen Koordinatensystemen kann eine Separation durchgeführt werden. Für $D, G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt $x : D \rightarrow G$ eine **orthogonale** Koordinatentransformation, falls $\det(x') > 0$ und $\frac{\partial x}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial x}{\partial y_\ell} = 0$, $j \neq \ell$.

Lemma 1.2 Ist $x : D \rightarrow G$ eine orthogonale Koordinatentransformation, so gilt mit $g_j = \left|\frac{\partial x}{\partial y_j}\right|$, $j = 1, \dots, n$,

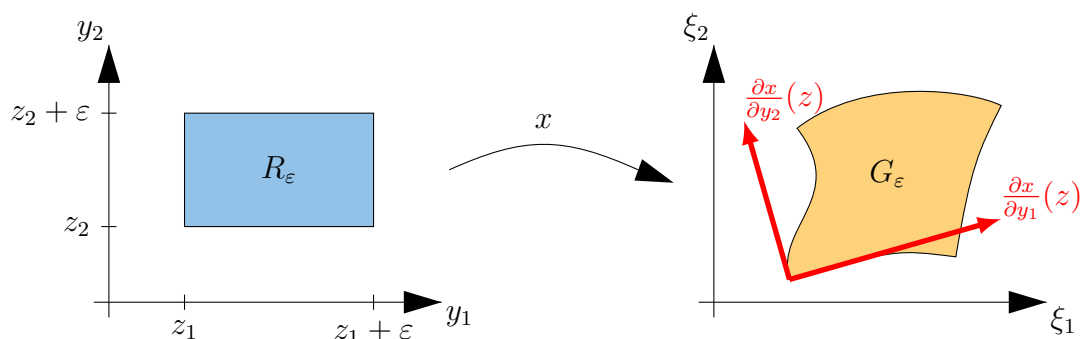
$$\Delta = \begin{cases} \frac{1}{g_1 g_2} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{g_2}{g_1} \frac{\partial}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{g_1}{g_2} \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \right], & n = 2 \\ \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{g_2 g_3}{g_1} \frac{\partial}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{g_1 g_3}{g_2} \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \right. \\ \quad \left. + \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{g_1 g_2}{g_3} \frac{\partial}{\partial y_3} \right) \right], & n = 3 \end{cases}$$

Beweis: Wir führen den Beweis nur für den Fall $n = 2$, die Argumentation für $n = 3$ ist aber analog.

Wegen $\frac{\partial x}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial x}{\partial y_2} = 0$ sind $\frac{\partial x}{\partial y_1}$ und $\frac{\partial}{\partial y_2} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$ linear abhängig. Für die Funktionaldeterminante der Koordinatentransformation x ist

$$\begin{aligned} \det x'(y) &= \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} - \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} = \frac{\partial x}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial}{\partial y_2} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \\ &= \left| \frac{\partial x}{\partial y_1} \right| \left| \frac{\partial}{\partial y_2} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{\partial x}{\partial y_1} \right| \left| \frac{\partial x}{\partial y_2} \right| = g_1 g_2. \end{aligned}$$

Setze $R_\varepsilon = [z_1, z_1 + \varepsilon] \times [z_2, z_2 + \varepsilon]$ und $G_\varepsilon = x(R_\varepsilon)$.



Nach der Transformationsformel für Gebietsintegrale ist

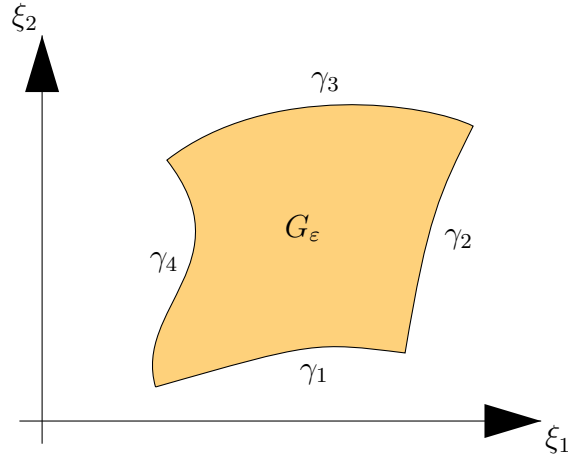
$$\int_{z_1}^{z_1+\varepsilon} \int_{z_2}^{z_2+\varepsilon} \Delta u(x(\cdot)) g_1 g_2 dy_2 dy_1 = \int_{G_\varepsilon} \Delta u(\xi) d\xi = \int_{G_\varepsilon} \nabla \cdot (\nabla u)(\xi) d\xi.$$

Bezeichnet $\nu(\xi)$ den äußeren Normaleneinheitsvektor an ∂G_ε im Punkt $\xi \in \partial G_\varepsilon$, so folgt mit dem Gauß'schen Satz

$$\int_{z_1}^{z_1+\varepsilon} \int_{z_2}^{z_2+\varepsilon} \Delta u(x(\cdot)) g_1 g_2 dy_2 dy_1 = \int_{\partial G_\varepsilon} \nabla u(\xi) \cdot \nu(\xi) ds.$$

Der Rand ∂G_ε ist aus den Bildern der 4 Randstrecken von R_ε gebildet. Es ist $G_\varepsilon = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ mit

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \left\{ x \begin{pmatrix} y_1 \\ z_2 \end{pmatrix} : y_1 \in (z_1, z_1 + \varepsilon) \right\}, & \gamma_2 &= \left\{ x \begin{pmatrix} z_1 + \varepsilon \\ y_2 \end{pmatrix} : y_2 \in (z_2, z_2 + \varepsilon) \right\}, \\ \gamma_3 &= \left\{ x \begin{pmatrix} y_1 \\ z_2 + \varepsilon \end{pmatrix} : y_1 \in (z_1, z_1 + \varepsilon) \right\}, & \gamma_4 &= \left\{ x \begin{pmatrix} z_1 \\ y_2 \end{pmatrix} : y_2 \in (z_2, z_2 + \varepsilon) \right\}. \end{aligned}$$



Somit bekommen wir auch gleich eine Parametrisierung der γ_j . Zum Beispiel ist

$$\int_{\gamma_1} \nabla u(\xi) \cdot \nu(\xi) ds = \int_{z_1}^{z_1+\varepsilon} \nabla u(x(y_1, z_2)) \cdot \nu(x(y_1, z_2)) \left| \frac{\partial x(y_1, z_2)}{\partial y_1} \right| dy_1.$$

Man beachte noch, dass wegen der Orthogonalitätseigenschaft der Transformation x auf γ_1 gilt

$$\nu(x(y_1, z_2)) = \frac{-(\partial x(y_1, z_2)/\partial y_2)}{|(\partial x(y_1, z_2)/\partial y_2)|}, \quad y_1 \in (z_1, z_1 + \varepsilon),$$

und analog für die anderen drei Randstücke.

Mit den normierten Ableitungsvektoren $e_j = \frac{1}{g_j} \frac{\partial x}{\partial y_j}$, $j = 1, 2$, schreiben wir das Gesamtintegral um zu

$$\begin{aligned} & \int_{z_1}^{z_1+\varepsilon} \int_{z_2}^{z_2+\varepsilon} \Delta u(x(\cdot)) g_1 g_2 dy_2 dy_1 \\ &= \int_{z_1}^{z_1+\varepsilon} \nabla u(x(y)) \cdot e_2 \Big|_{y_2=z_2}^{z_2+\varepsilon} g_1 dy_1 + \int_{z_2}^{z_2+\varepsilon} \nabla u(x(y)) \cdot e_1 \Big|_{y_1=z_1}^{z_1+\varepsilon} g_2 dy_2 \\ &= \int_{z_1}^{z_1+\varepsilon} \int_{z_2}^{z_2+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{g_1}{g_2} \frac{\partial}{\partial y} u(x(y)) \right) dy_2 dy_1 + \int_{z_2}^{z_2+\varepsilon} \int_{z_1}^{z_1+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{g_2}{g_1} \frac{\partial}{\partial y_1} u(x(y)) \right) dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

Da beide Integrale für jedes $z = (z_1, z_2)^\top$ und jedes $\varepsilon > 0$ übereinstimmen, sind auch die Integranden für jedes $y \in G$ gleich. ■

Beispiel 1.3 Wir führen eine Separation in Polarkoordinaten durch. Diese sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Statt der Indizes 1, 2 aus dem Lemma verwenden wir Indizes 1, 2. Damit ist

$$g_r = \sqrt{\left| \frac{\partial x_1}{\partial r} \right|^2 + \left| \frac{\partial x_2}{\partial r} \right|^2} = 1,$$

$$g_\varphi = \left((-r \sin \varphi)^2 + (r \cos^2 \varphi)^2 \right)^{1/2} = r.$$

Eingesetzt in die Formel aus Lemma 1.2 ergibt sich

$$\Delta = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right].$$

Die Helmholtz-Gleichung stellt sich nun dar als

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} u(r, \varphi) + k^2 u(r, \varphi) = 0$$

Der Separationsansatz

$$u(r, \varphi) = v(r) w(\varphi)$$

führt auf

$$r^2 v''(r) + r v'(r) + (r^2 k^2 + \gamma) v(r) = 0$$

$$w''(\varphi) - \gamma w(\varphi) = 0$$

Da w 2π -periodisch sein muss, folgt

$$\gamma = -n^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

und

$$w_n(\varphi) = e^{\pm i n \varphi}.$$

Für v ergibt sich mit $r = \frac{z}{k}$ und $V(z) = v\left(\frac{z}{k}\right)$ die **Bessel'sche Differenzialgleichung**

$$z^2 V''(z) + z V'(z) + (z^2 - n^2) V(z) = 0, \quad z > 0.$$

Zwei linear unabhängige Lösungen dieser Differenzialgleichung erhält man durch einen Potenzreihenansatz

$$V_n^{(1)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j,$$

bzw. mit *Variation der Konstanten* als

$$V_n^{(2)}(z) = V_n^{(1)}(z) \ln(z) + z^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j.$$



Satz und Definition 1.4 Sei $n \in \mathbb{N}_0$

(a) Die **Besselfunktion** (oder Besselfunktion erster Art) der Ordnung n ,

$$J_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

ist eine analytische Lösung der Bessel'schen Differenzialgleichung in \mathbb{C} .

(b) Die **Neumannfunktion** (oder Besselfunktion 2. Art) der Ordnung n ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{z}{2} + C \right) J_n(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-j-1)!}{j!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j-n} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(j+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2j+n} (\psi_{j+n} + \psi_j) \end{aligned}$$

mit der Euler'schen Konstanten

$$C = \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\left(\sum_{l=1}^j \frac{1}{l} \right) - \ln(j) \right], \quad \psi_0 = 0, \quad \psi_j = \sum_{l=1}^j \frac{1}{l}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Die Neumannfunktion ist eine analytische Lösung der Bessel'schen Differenzialgleichung in $\mathbb{C} \setminus \{z \leq 0\}$.

(c) Die Funktionen

$$\begin{aligned} H_n^{(1)} &= J_n + iY_n, \\ H_n^{(2)} &= J_n - iY_n, \end{aligned}$$

heißen **Hankelfunktionen** der ersten bzw. zweiten Art.

(d) Für negative Ordnungen sind all diese Funktionen definiert durch

$$f_{-n} = (-1)^n f_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad f \in \{J_n, Y_n, H_n^{(1)}, H_n^{(2)}\}.$$

Beweis: Literatur zu Besselfunktion. ■

Fazit: In Polarkoordinaten haben wir Lösungen der Form

$$u_n(x) = J_n(kr)e^{in\varphi}, \quad \text{oder} \quad \tilde{u}_n(x) = Y_n(kr)e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

oder lineare Superpositionen davon.

Beispiel 1.5 Analog kann eine Separation in Kugelkoordinaten durchgeführt werden. Die Formel für die Transformation ist

$$x = r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad r > 0, \quad \vartheta \in (0, \pi), \quad \varphi \in (-\pi, \pi).$$

Die Ableitungsvektoren der Transformation haben die Längen

$$g_r = 1, \quad g_\vartheta = \left| r \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} \right| = r, \quad g_\varphi = \left| r \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right| = r \sin \vartheta.$$

Somit hat der Laplace-Operator die Darstellung

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \end{aligned}$$

Der Separationsansatz $u(x) = u_1(r) u_2(\vartheta) u_3(\varphi)$ führt damit auf die drei gewöhnlichen Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned} (r^2 u_1'(r))' + (k^2 r^2 + \lambda) u_1(r) &= 0, \\ \sin \vartheta (\sin \vartheta u_2'(\vartheta))' - (\gamma + \lambda \sin^2 \vartheta) u_2(\vartheta) &= 0, \\ u_3''(\varphi) + \gamma u_3(\varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Hierbei sind neben den Lösungen u_j der einzelnen Differenzialgleichungen die Kopplungskonstanten $\lambda, \gamma \in \mathbb{C}$ zu bestimmen.

Die dritte Differenzialgleichung ist ganz analog zu derjenigen aus dem Beispiel für $n = 2$ und liefert $u_3(\varphi) = e^{im\varphi}$, $m \in \mathbb{Z}$, und $\gamma = m^2$. Die zweite Differenzialgleichung kann zu einer Legendre'schen Differenzialgleichung transformiert werden. Es ergibt sich $\lambda = n(n+1)$, $n \geq |m|$ und als Lösung sogenannte *assoziierte Legendre-Funktionen* P_n^m , $0 \leq m \leq n$. Die Produkte der Lösungen der ersten und zweiten Differenzialgleichungen werden Kugelfunktionen genannt,

$$Y_n^m(\vartheta, \varphi) = P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \quad m = -n, \dots, n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Wir werden hierauf im Laufe der Vorlesung noch im Detail eingehen.

Die erste Differenzialgleichung kann durch $v(kr) = u_1(r)$ auf die **sphärische Bessel'sche Differenzialgleichung**

$$z^2 v''(z) + z v'(z) + (z^2 - n(n+1)) v(z) = 0$$

zurückgeführt werden. ◀

Satz und Definition 1.6 Sei $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Die **sphärische Besselfunktion**

$$j_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^j j! 1 \cdot 3 \cdots (2n+2j+1)} z^{2j+n}$$

ist eine analytische Lösung der sphärischen Bessel'schen Differenzialgleichung n -ter Ordnung in \mathbb{C} .

(b) Die **sphärische Neumannfunktion**

$$y_n(z) = -\frac{(2n)!}{2^n n!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^j j! (1-2n)(3-2n) \cdots (2j-1-2n)} z^{2j-n-1}$$

ist analytische Lösung der sphärischen Bessel'schen Differenzialgleichung n -ter Ordnung in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(c) Die **Linearkombinationen**

$$h_n^{(1)} = j_n + iy_n, \quad h_n^{(2)} = j_n - iy_n$$

heißen **sphärische Hankelfunktionen**.

Konkret ist

$$\begin{aligned} h_0^{(1)}(z) &= j_0(z) + iy_0(z) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^j j! 1 \cdot 3 \cdots (2j+1)} z^{2j} - i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^j j! 1 \cdot 3 \cdots (2j-1)} z^{2j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^{2j}}{(2j+1)!} z^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^{2j-1}}{(2j)!} z^{2j-1} = -\frac{i}{z} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(iz)^j}{j!} \\ &= -\frac{ie^{iz}}{z}. \end{aligned}$$

Kapitel 2

Darstellungssätze

Wir wollen Lösungen der Helmholtz-Gleichung in einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ oder $\subseteq \mathbb{R}^3$ untersuchen. Dazu benötigen wir zunächst eine Reihe klassischer Funktionenräume, die wir im Folgenden verwenden wollen. Dazu sei $D \subseteq \mathbb{R}^N$, $N = 1, 2, 3$ offen.

- Mit $C^n(D)$ bezeichnen wir den Raum der in D n -mal stetig differenzierbaren Funktionen, $n \in \mathbb{N}$. Mit $C^\infty(D)$ bezeichnen wir den Raum der in D beliebig oft differenzierbaren Funktionen.
- Mit $C^n(\overline{D})$ bezeichnen wir den Raum derjenigen Funktionen aus $C^n(D)$, deren sämtliche partielle Ableitungen bis zur n -ten Ordnung sich stetig auf \overline{D} fortsetzen lassen. Analog wird $C^\infty(\overline{D})$ definiert.

Ist D beschränkt, so ist $C^k(\overline{D})$, $k \in \mathbb{N}$, ein Banach-Raum mit der Norm

$$\|u\|_k = \sum_{j=0}^k \max_{|\alpha|=j} \sup_{x \in D} |D^\alpha u(x)|, \quad u \in C^k(\overline{D}).$$

Um auch Aussagen über Randwerte stetig differenzierbarer Funktionen zu treffen, benötigen wir auch geeignete Funktionenräume auf dem Rand von ∂D . Dabei macht es nur Sinn, Ränder zu betrachten, die gewisse Glattheitseigenschaften haben.

Definition 2.1 Der Rand ∂D heißt **C^n -glatt** (bzw. das Gebiet D), $n \geq 1$, falls es zu jedem $x \in \partial D$ eine Umgebung U gibt, so dass $U \cap \partial D$ durch eine n -mal stetig differenzierbare reguläre Parametrisierung $\eta : B_r(0) \rightarrow U$ beschrieben werden kann. Regulär bedeutet hier, dass η bijektiv und die Tangentialvektoren $\partial_1 \eta$ und $\partial_2 \eta$ linear unabhängig sind.

Bemerkung 2.2 Falls D C^1 -glatt ist, so gilt:

- (a) Es existiert ein Normaleneinheitsvektor ν an ∂D . Dieser kann über die lokale Parametrisierung bestimmt werden. Ist z.B. $\partial D \cap U = \{x(t) : t \in I \subseteq \mathbb{R}\}$, so gilt

$$\nu(t) = \pm \frac{1}{|x'(t)|} \begin{pmatrix} x_2'(t) \\ -x_1'(t) \end{pmatrix}$$

Für $\partial D \cap U = \{x(t) : t \in V \subseteq \mathbb{R}^2\}$ ist

$$\nu(t) = \pm \frac{\partial_1 x(t) \times \partial_2 x(t)}{|\partial_1 x(t) \times \partial_2 x(t)|}$$

- (b) Es gilt der **Gauß'sche Satz**: für ein Vektorfeld $v \in C^1(D, \mathbb{R}^N) \cap C(\bar{D}, \mathbb{R}^N)$ ist

$$\int_D \nabla \cdot v \, dx = \int_{\partial D} v \cdot \nu \, ds$$

Hierbei und in (c) bezeichnet ν den nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor an ∂D .

- (c) Es gelten die **Green'schen Identitäten**:

- (i) für $u \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$ und $v \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ mit Normalableitung $\frac{\partial v}{\partial \nu} = \nabla v \cdot \nu$ ist

$$\int_D (u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v) \, dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, ds$$

(Gauß'scher Satz mit $u \nabla v$),

- (ii) für $u, v \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ ist

$$\int_D (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \, ds.$$



Ist S ein relativ offenes Randstück eines C^n -Gebiets, so kann der Raum $C^n(S)$ definiert werden. Es ist $u \in C^n(S)$, wenn für jedes $x \in S$ und der lokalen Parametrisierung $\gamma : U \rightarrow S$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^{N-1}$ offen und $x \in \gamma(U)$ gilt: $u \circ \gamma \in C^n(U)$.

Bei der Untersuchung von Lösungen der Helmholtz-Gleichung spielen die folgenden Funktionen eine herausragende Rolle.

Definition 2.3 Die Funktionen

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|), & x, y \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y \\ \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ik|x-y|)}{|x-y|}, & x, y \in \mathbb{R}^3, \quad x \neq y \end{cases}$$

heißen **Fundamentallösungen** der Helmholtzgleichung im \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 .

Bemerkung 2.4

- (a) Wie in Kapitel 1 gezeigt wurde, handelt es sich für $x \neq y$ bezüglich beider Variablen um Lösungen der Helmholtz-Gleichung.
- (b) Es sind auch eine Reihe anderer Namensgebungen für diese Funktionen üblich:
- Grundlösungen,
 - Green'sche Funktionen des freien Feldes,
 - Punktquellen.
- (c) Im folgenden wird vor allem die Natur der Singularitäten der Fundamentallösungen eine wesentliche Rolle spielen. Im \mathbb{R}^2 gilt

$$\Phi(x, y) = \boxed{\frac{1}{2\pi} \ln |x-y|} + \text{const} + O(|x-y|^2 \ln |x-y|), \quad |x-y| \rightarrow 0.$$

Im \mathbb{R}^3 gilt

$$\Phi(x, y) = \boxed{\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}} + \text{const} + O(|x-y|), \quad |x-y| \rightarrow 0.$$

Damit treten dieselben Singularität wie bei den Grundlösungen der Laplace-Gleichung auf (vgl. Integralgleichungen, Kapitel 4).



Mit Hilfe der Fundamentallösungen lassen sich Lösungen der Helmholtz-Gleichung in beschränkten glatten Gebieten allein aus ihren Cauchy-Daten auf dem Rand des Gebiets (d.h. $u|_{\partial D}$, $\partial u/\partial \nu|_{\partial D}$) bestimmen.

Satz 2.5 (Green'scher Darstellungssatz) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^N$ für $N = 2, 3$, offen, beschränkt und C^1 glatt. Ist $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ eine Lösung der Helmholtz-Gleichung, so gilt

$$\int_{\partial D} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} u(y) \right) ds(y) = \begin{cases} u(x), & x \in D, \\ 0, & x \notin \bar{D}. \end{cases}$$

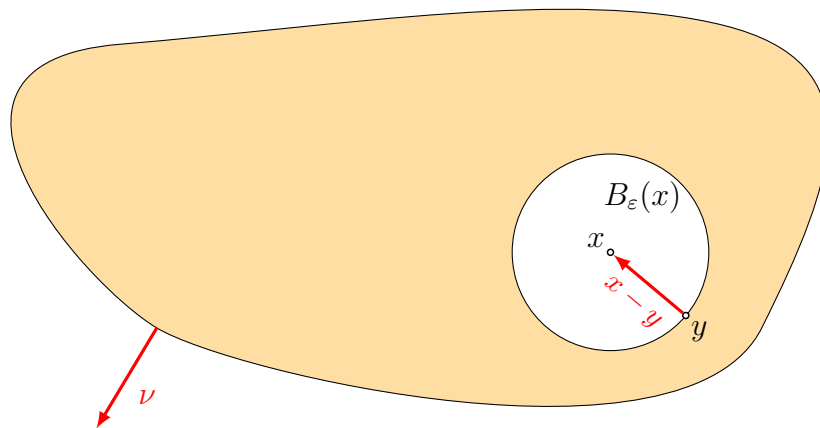
Achtung: Wir erhalten mit dem Darstellungssatz keine Aussage für $x \in \partial D$. Bei der Untersuchung von Potentials werden wir später darauf zurückkommen.

Beweis: (i) Wir betrachten zunächst den Fall $x \notin \bar{D}$. Dann sind u und $\Phi(x, \cdot) \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ und beide Funktionen sind Lösungen der Helmholtz-Gleichung in D . Mit der zweiten Green'schen Identität folgt

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} u(y) \right) ds(y) \\ &= \int_D (\Phi(x, y) \Delta u(y) - u(y) \Delta_y \Phi(x, y)) dy \\ &= \int_D (-k^2 \Phi(x, y) u(y) + u(y) k^2 \Phi(x, y)) dy = 0. \end{aligned}$$

(ii) Nun betrachten wir den Fall $x \in D$. Wir wählen $\varepsilon > 0$ mit

$$B_\varepsilon(x) = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z - x| < \varepsilon\} \subseteq D.$$



Wie in Schritt (i) ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{D \setminus \overline{B_\varepsilon(x)}} (\Phi(x, y) \Delta u(y) - u(y) \Delta_y \Phi(x, y)) \, dy \\
&= \int_{\partial D} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} u(y) \right) \, ds(y) \\
&\quad - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} u(y) \right) \, ds(y).
\end{aligned}$$

Hierbei ist ν jeweils der *äußere* Normaleneinheitsvektor an ∂D und an $\partial B_\varepsilon(x)$. Insbesondere ist zeigt ν and $\partial B_\varepsilon(x)$ vom Mittelpunkt weg, ist also genau andersherum orientiert als der Vektor $x - y$ in der Abbildung. Aus der speziellen Form von $B_\varepsilon(x)$ kann ν hier explizit angegeben werden,

$$\nu(y) = \frac{y - x}{\varepsilon} \quad \text{für } y \in \partial B_\varepsilon(x).$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial D} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} u(y) \right) \, ds(y) \\
&\quad - \frac{1}{\varepsilon} \int_{|x-y|=\varepsilon} (\Phi(x, y) (y - x) \cdot \nabla u(y) - (y - x) \cdot \nabla_y \Phi(x, y) u(y)) \, ds(y).
\end{aligned}$$

Das Integral ist im \mathbb{R}^2 schwieriger zu analysieren als im \mathbb{R}^3 , denn mit der Funktion e^{ir}/r kann man expliziter arbeiten als mit der Hankel-Funktion. Der Leser ist aufgefordert die erforderlichen Schritte für den \mathbb{R}^3 selbst nachzuvollziehen. Wir parametrisieren den Rand von $B_\varepsilon(x)$ durch Polarkoordinaten

$$y = x + \varepsilon \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in (-\pi, \pi].$$

Mit Bemerkung 2.4 (c) ist dann

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\varepsilon \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\varepsilon) \right) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \ln \varepsilon) = 0.$$

Wir untersuchen zunächst den ersten Summanden aus dem Integral oben:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{|x-y|=\varepsilon} \Phi(x, y) (y-x) \cdot \nabla u(y) \, ds(y) \right| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{|x-y|=\varepsilon} |\Phi(x, y)| \varepsilon \sqrt{2} \|\nabla u\|_\infty \, ds(y) \\ &= \frac{\sqrt{2} \|\nabla u\|_\infty}{\varepsilon} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^2 \left| \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\varepsilon) \right| \, d\varphi = 2\sqrt{2} \pi \|\nabla u\|_\infty \left| \varepsilon \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\varepsilon) \right| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$. Für den zweiten Summanden bestimmen wir zunächst den Gradienten der Fundamentallösung.

$$\nabla_y \Phi(x, y) = -\frac{ik}{4} \left(H_0^{(1)} \right)'(k|x-y|) \frac{x-y}{|x-y|} = \frac{ik}{4\varepsilon} H_1^{(1)}(k\varepsilon) (x-y)$$

für $|x-y| = \varepsilon$. Ferner ist

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon H_1^{(1)}(k\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon i Y_1(k\varepsilon) = -\frac{2i}{\pi k}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon} \int_{|x-y|=\varepsilon} u(y) (y-x) \cdot \nabla_y \Phi(x, y) \, ds(y) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{ik}{4\varepsilon} H_1^{(1)}(k\varepsilon) (-\varepsilon^2) \int_{|x-y|=\varepsilon} u(y) \, ds(y) \\ &= -\frac{ik}{4} \varepsilon H_1^{(1)}(k\varepsilon) \int_{-\pi}^{\pi} \left[u(x) + \underbrace{\varepsilon \nabla u(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}}_{\text{beschränkt}} \right] \, d\varphi \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{ik}{4} \left(-\frac{2i}{\pi k} \right) 2\pi u(x) = -u(x). \end{aligned}$$

■

Satz 2.6 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, offen. Eine Lösung der Helmholtzgleichung in D ist analytisch, d.h. sie lässt sich um jedes $x \in D$ in eine Potenzreihe entwickeln.

Beweis: Jede analytische Funktion reeller Variablen lässt sich analytisch in eine komplexe Umgebung des reellen Definitionsbereichs fortsetzen. Die Fortsetzung

ist holomorph, erfüllt also die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, d.h. mit $f(z) = g(z_r, z_i) + i h(z_r, z_i)$, wobei $z = z_r + i z_i$, $z_r, z_i \in \mathbb{R}$ und g, h reellwertig gilt

$$\frac{\partial}{\partial z_r} g(z_r, z_i) = \frac{\partial}{\partial z_i} h(z_r, z_i) \quad \frac{\partial}{\partial z_i} g(z_r, z_i) = -\frac{\partial}{\partial z_r} h(z_r, z_i).$$

Umgekehrt ist jede Lösung dieser Differentialgleichungen eine analytische Funktion.

Sei $K \subseteq D$ kompakt. Dann ist nach dem Darstellungssatz

$$u(x) = \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) ds(y), \quad x \in K.$$

Die partiellen Ableitungen des Integranden bezüglich x sind auf der kompakten Menge $K \times \partial D$ stetig und daher beschränkt. Mit dem Lebesgue'schen Konvergenz-satz (Majorisierung des Integranden durch die eben gefundene Schranke) folgt, dass bei Bildung der partiellen Ableitungen von u die Ableitungen mit dem Integral über ∂D vertauscht werden können. Die Funktionen $\Phi(\cdot, y)$ und $\frac{\partial \Phi(\cdot, y)}{\partial \nu(y)}$ sind für jedes $y \in \partial D$ analytisch, erfüllen also die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen. Somit erfüllt auch u diese Differentialgleichungen in K und ist analytisch. Da K beliebig gewählt war, folgt, dass u auf D analytisch ist. ■

Der natürliche Rahmen für Streuprobleme sind allerdings nicht die bisher betrachteten beschränkten Gebiete, sondern deren Komplemente, sogenannte **Außengebiete**. Es wäre günstig, auch hier einen Darstellungssatz zur Verfügung zu haben. Dazu ist es notwendig, sich auf gewisse Lösungen der Helmholtz-Gleichung einzuschränken, die ein charakteristisches Verhalten für „große“ x besitzen.

Zur Motivation betrachten wir beispielhaft zwei einfache Lösungen der Helmholtz-Gleichung in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$,

$$u_1(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|}, \quad u_2(x) = \frac{e^{-ik|x|}}{|x|}$$

Vom Betrag her sind beide Lösungen gleich. Welchen Unterschied gibt es zwischen diesen beiden Lösungen, welche Bedeutung kommt also der Phase zu? Dazu setzen wir eine „physikalische Brille“ auf und betrachten die zugehörigen zeitabhängigen Lösungen

$$U_j(x, t) = \operatorname{Re} (e^{-i\omega t} u_j(x)) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{|x|} e^{ik(\pm|x|-ct)} \right) = \frac{\cos(k(|x| \mp ct))}{|x|}.$$

Lassen wir den Abfall $1/|x|$ außer Acht, so bleibt der Wert der Amplitude konstant, falls $|x| \mp ct = \text{konst.}$ Wir variieren nun t und beobachten, wie sich x ändern muss, damit $|x| \mp ct$ konstant bleibt.

1. **Fall:** „–“ mit wachsendem t wird auch $|x|$ größer, wir erhalten eine **auslaufende Kugelwelle** (ein gestreutes Feld)
2. **Fall:** „+“ mit wachsendem t wird $|x|$ kleiner, wir erhalten eine **einlaufende Kugelwelle** (ein einfallendes Feld)

Wir möchten dieses Verhalten charakterisieren, ohne dabei den Faktor $e^{-i\omega t}$ zu benutzen, also allein auf Grundlage der Helmholtz-Gleichung und ihrer Lösungen. Dazu betrachten wir die Ableitungen der Funktionen u_j in radialer Richtung,

$$\frac{\partial u_{1/2}}{\partial r}(x) = \pm ik \frac{e^{\pm ik|x|}}{|x|} - \frac{e^{\pm ik|x|}}{|x|^2} = \pm ik u_{1/2}(x) - \frac{u_{1/2}(x)}{|x|}$$

Diese Beobachtung führt auf die folgende Definition.

Definition 2.7 Eine Lösung $u \in C^2(\{|x| > R\})$ der Helmholtzgleichung genügt der **Sommerfeld'schen Ausstrahlungsbedingung (SAB)** im \mathbb{R}^N , $N = 2, 3$, falls

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{N-1}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial r}(x) - ik u(x) \right) = 0$$

gilt (mit $r = |x|$), und der Grenzwert gleichmäßig für alle Richtungen $\frac{x}{|x|}$ angenommen wird.

Im folgenden untersuchen wir, ob die SAB für die uns schon bekannten einfachen Lösungen erfüllt ist.

Beispiel 2.8 Wir betrachten eine ebene Welle $u(x) = \exp(ik d \cdot x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, mit Ausbreitungsrichtung $d \in \mathbb{S}^2$. Mit $x = r\hat{x}$, $\hat{x} \in \mathbb{S}^2$, folgt

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x) = \frac{\partial}{\partial r} e^{ik r d \cdot \hat{x}} = ik d \cdot \hat{x} u(x).$$

Damit ist

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x) - ik u(x) = ik (d \cdot \hat{x} - 1) u(x).$$

Da u betragsmäßig eins ist, geht dieser Ausdruck nur gegen null, falls $d \cdot \hat{x} = 1$ ist, was bedeutet, dass Ausbreitungsrichtung und Beobachtungsrichtung übereinstimmen. Genau für diesen Fall ist

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r}(x) - ik u(x) \right) = 0.$$

Der Grenzwert wird also nicht für alle Richtungen $\frac{x}{|x|}$ angenommen, die SAB ist nicht erfüllt. ◀

Ganz anders stellt sich die Sache für die radialsymmetrischen Lösungen dar, die uns die Fundamentallösungen liefern.

Lemma 2.9 Die Grundlösungen $\Phi(\cdot, \cdot)$ der Helmholtz-Gleichung erfüllen die SAB im \mathbb{R}^2 und im \mathbb{R}^3 für $|x| \rightarrow \infty$ gleichmäßig für y aus einer kompakten Menge, oder für $|y| \rightarrow \infty$ gleichmäßig für x aus einer kompakten Menge.

Beweis: Der im \mathbb{R}^3 ergibt sich aus den motivierenden Überlegungen oben. Der Leser sollte dies zur Übung und Vertiefung nachvollziehen.

Im \mathbb{R}^2 ist die Grundlösung

$$\Phi(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|), \quad x, y \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y.$$

Für festes y ist die Ableitung in radialer Richtung bezüglich x gegeben als

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial |x|} &= \frac{x}{|x|} \cdot \nabla_x \Phi(x, y) = \frac{ik}{4} \left(H_0^{(1)} \right)'(k|x-y|) \frac{x-y}{|x-y|} \cdot \frac{x}{|x|} \\ &= -\frac{ik}{4} H_1^{(1)}(k|x-y|) \frac{(x-y) \cdot x}{|x-y||x|} \end{aligned}$$

In Formelsammlungen (zum Beispiel Abramowitz und Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Formel 9.2.3) findet man eine Formel für das Verhalten der Hankel-Funktionen für betragsmäßig große Argumente bei fester Ordnung n ,

$$H_n^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left(1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right) \right) \quad (|z| \rightarrow \infty).$$

Wir setzen dies in den zweiten Faktor aus der linken Seite der SAB ein und erhalten

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial |x|} - ik\Phi(x, y) \\ &= \frac{ik}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k|x-y|}} e^{i(k|x-y| - \frac{\pi}{4})} \left[-e^{-\frac{i\pi}{2}} \frac{(x-y)}{|x-y|} \cdot \frac{x}{|x|} - i \right] \left(1 + O\left(\frac{1}{|x-y|}\right) \right) \\ &= \sqrt{\frac{k}{8\pi|x-y|}} e^{i(k|x-y| - \frac{\pi}{4})} \left[1 - \frac{(x-y)}{|x-y|} \cdot \frac{x}{|x|} \right] \left(1 + O\left(\frac{1}{|x-y|}\right) \right). \end{aligned}$$

Wir geben nun eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^2$ vor mit $|z| \leq M$ für $z \in K$ und setzen $y \in K$ voraus. Wir untersuchen zunächst den Term unter der Wurzel. Für den dort auftauchenden Faktor $1/|x-y|$ gilt

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{|x|} \frac{1}{\left| \hat{x} - \frac{y}{|x|} \right|} \quad \text{mit} \quad \hat{x} = \frac{x}{|x|}.$$

Setze

$$h(\varepsilon) = \frac{1}{|\hat{x} - \varepsilon y|}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2M}$$

Mit dem Mittelwertsatz erhalten wir für $|x| \geq 2M$:

$$\frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|} \left[h\left(\frac{1}{|x|}\right) - 1 \right] = \frac{1}{|x|} \left[h\left(\frac{1}{|x|}\right) - h(0) \right] = \frac{1}{|x|^2} h'(\varepsilon),$$

mit einem ε zwischen 0 und $1/|x|$. Für die Ableitung von h gilt

$$|h'(\varepsilon)| = \left| \frac{(\hat{x} - \varepsilon y) \cdot y}{|\hat{x} - \varepsilon y|^3} \right| \leq \frac{|y|}{|\hat{x} - \varepsilon y|^2} \leq \frac{|y|}{(|\hat{x}| - \varepsilon|y|)^2} \leq \frac{|y|}{(1 - \frac{1}{2})^2} \leq 4M.$$

Die Schranke ist unabhängig von \hat{x} und gilt für alle $y \in K$. Wir folgern zunächst

$$\left| \frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{|x|} \right| \leq \frac{4M}{|x|^2}$$

und damit

$$\frac{1}{|x - y|} = \frac{1}{|x|} \left(1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right) \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

gleichmäßig in \hat{x} und für $y \in K$.

Es verbleibt, den Term in der eckigen Klammer zu betrachten. Hier verwenden wir die eben gemachten Überlegungen und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{(x - y) \cdot x}{|x - y|} \cdot \frac{1}{|x|} &= \frac{|x|}{|x - y|} - \frac{y \cdot x}{|x - y| |x|} = \frac{|x|}{|x - y|} \left(1 + \frac{y \cdot x}{|x|^2} \right) \\ &= \left[1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right] \left(1 + \frac{y \cdot x}{|x|^2} \right) = 1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad (|x| \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

gleichmäßig in $y \in K$, denn $|y \cdot x|/|x| \leq M$ für $y \in K$. Damit ist gezeigt, dass Φ die SAB für x gleichmäßig für $y \in K$ erfüllt. Da Φ in x, y symmetrisch ist, erhalten wir dieses Resultat auch für y gleichmäßig mit x aus einer kompakten Menge. ■

Satz 2.10 (Darstellungssatz in Außengebieten) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, offen, beschränkt und C^1 -glatt. Ist $u \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^N \setminus D)$ eine Lösung der Helmholtz-Gleichung, die der SAB genügt, so gilt

$$\int_{\partial D} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} u(y) \right) ds(y) = \begin{cases} 0, & x \in D \\ -u(x), & x \in \mathbb{R}^N \setminus \bar{D}, \end{cases}$$

wobei ν den äußeren Normaleneinheitsvektor an ∂D bezeichnet.

Beweis: Wir wählen $R \in \mathbb{R}$ so groß, dass \bar{D} in der Kugel $B_R(0)$ enthalten ist. Mit $\Omega_R = B_R(0) \setminus \bar{D}$ besagt der Darstellungssatz 2.5:

$$\left. \begin{array}{l} x \in \Omega_R : u(x) \\ x \notin \bar{\Omega}_R : 0 \end{array} \right\} = \int_{\partial\Omega_R} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} u(y) \right) ds(y) \\ = \int_{|y|=R} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} u(y) \right) ds(y) \\ - \int_{\partial D} \left(\Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} u(y) \right) ds(y)$$

Es bleibt zu zeigen, dass das erste Integral für $R \rightarrow \infty$ verschwindet. Dazu verwenden wir die SAB für u und für $\Phi(x, \cdot)$. Setze

$$I_1 = \int_{|y|=R} \left(u(y) \left(\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - ik \Phi(x, y) \right) \right) ds(y), \\ I_2 = \int_{|y|=R} \Phi(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - ik u(y) \right) ds(y).$$

Wir beginnen mit I_2 . Mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung in L^2 gilt

$$|I_2|^2 \leq \int_{|y|=R} |\Phi(x, y)|^2 ds(y) \int_{|y|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - ik u(y) \right|^2 ds(y).$$

Indem wir im zweiten Integral die Fläche $\{|y| = R\}$ durch Kugelkoordinaten parametrisieren, erhalten wir einen Faktor R^2 . Da u die SAB erfüllt, geht der Integrand nach dieser Transformation noch immer gegen null, womit das zweite Integral insgesamt gegen null geht. Es bleibt zu zeigen, dass das erste Integral beschränkt ist. Im \mathbb{R}^3 gilt

$$\int_{|y|=R} |\Phi(x, y)|^2 ds(y) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{|y|=R} \frac{1}{|x-y|^2} ds(y) \leq \frac{1}{16\pi^2} \int_{|y|=R} \frac{1}{(|y|-|x|)^2} ds(y) \\ \leq \frac{1}{4R^2\pi^2} \int_{|y|=R} ds(y) = \frac{1}{\pi}.$$

Im \mathbb{R}^2 gilt analog

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} \int_{|y|=R} \left| H_0^{(1)}(k(x-y)) \right|^2 ds(y) &= \frac{1}{8\pi} \int_{|y|=R} \left(\frac{1}{|x-y|} + O\left(\frac{1}{|x-y|^{\frac{3}{2}}}\right) \right) ds(y) \\ &\stackrel{|x| \leq \frac{R}{2}}{\leq} \frac{1}{2\pi} + O\left(\frac{1}{R^{1/2}}\right). \end{aligned}$$

Auch das Integral I_1 wird mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung abgeschätzt,

$$|I_1|^2 \leq \int_{|y|=R} |u(y)|^2 ds(y) \int_{|y|=R} \left| \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - ik \Phi(x, y) \right|^2 ds(y).$$

Aufgrund von Lemma 2.9 verschwindet wieder das zweite Integral für $R \rightarrow \infty$. Es bleibt zu zeigen, dass das erste Integral beschränkt ist. Dazu beachten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - ik u(y) \right|^2 ds \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right|^2 + k^2 |u(y)|^2 + 2k \operatorname{Im} \left(u(y) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}(y) \right) \right] ds. \end{aligned}$$

Mit der ersten Green'schen Identität angewandt auf das Gebiet Ω_R folgt

$$\int_{|y|=R} u(y) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}(y) ds = \int_{\partial D} u(y) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}(y) ds + \int_{\Omega_R} (|\nabla u(y)|^2 - k^2 |u(y)|^2) dy.$$

Wir nehmen den Imaginärteil dieser Gleichung und setzen ihn oben ein. Es folgt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right|^2 + k^2 |u(y)|^2 \right] ds = -2k \operatorname{Im} \int_{\partial D} u(y) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}(y) ds.$$

Beide Terme links sind positiv und ihre Summe konvergiert. Daher sind beide Terme beschränkt, insbesondere das Integral über $|u|^2$. Dies war zu zeigen. ■

Kommentar: Aus dem Beweis ergibt sich, dass die SAB selbst eine stärkere Voraussetzung ist, als für den Beweis benötigt wird. Tatsächlich reicht die schwächere Forderung

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - ik u(y) \right|^2 ds = 0$$

aus, um den Darstellungssatz zu erhalten. Aus der Darstellungsformel ergibt sich dann aber zusammen mit Lemma 2.9 wiederum, dass u der SAB in der starken Form gemäß Definition 2.7 genügt. Die SAB und obige schwächere Forderung sind also äquivalent. Die schwächere Form ist bei der Definition geeigneter Räume für schwache Lösungen von Streuproblemen wichtig.

Satz und Definition 2.11 Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^N \setminus D)$, $N = 2, 3$, eine Lösung der Helmholtz-Gleichung, die die SAB erfüllt. Dann gilt

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|^{\frac{N-1}{2}}} \left(u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right)$$

für $|x| \rightarrow \infty$, gleichmäßig in $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$. Dabei heißt $u^\infty : S^{N-1} \rightarrow \mathbb{C}$ **Fernfeld** oder **Streuamplitude**. Ferner gilt

$$u_\infty(\hat{x}) = \gamma_N \int_{\partial D} \left(u(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) e^{-ik\hat{x}\cdot y} \right) ds(y)$$

mit

$$\gamma_2 = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8k\pi}} \quad \text{und} \quad \gamma_3 = \frac{1}{4\pi}.$$

Beweis: Wir führen den Beweis nur für $N = 2$, welches der schwierigere Fall ist. Die Argumentation für $N = 3$ erfolgt aber analog. Es ist im wesentlichen zu zeigen, dass die Fundamentallösung ein Fernfeld besitzt. Wir beginnen wieder mit der asymptotischen Darstellung

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|) = \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k|x-y|}} e^{i(k|x-y|-\frac{\pi}{4})} \left(1 + O\left(\frac{1}{|x-y|}\right) \right) \\ &= \gamma_2 \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \sqrt{\frac{|x|}{|x-y|}} e^{ik(|x-y|-|x|)} \left(1 + O\left(\frac{1}{|x-y|}\right) \right) \quad (|x-y| \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Im Beweis von Lemma 2.9 hatten wir schon gesehen, dass

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{|x|} \left(1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right) \quad (|x| \rightarrow \infty),$$

und dieses Verhalten ist gleichmäßig in \hat{x} und für y aus der kompakten Menge ∂D . Damit folgt mit dem Satz von Taylor für $\sqrt{1+\cdot}$

$$\sqrt{\frac{|x|}{|x-y|}} = \sqrt{1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad (|x| \rightarrow \infty).$$

Für den in der Exponentialfunktion auftauchenden Term sehen wir ferner für $|x| \geq 2|y|$

$$\begin{aligned} |x-y| - |x| + \hat{x} \cdot y &= \frac{|x-y|^2 - (|x| - \hat{x} \cdot y)^2}{|x-y| + |x| - \hat{x} \cdot y} = \frac{|y|^2 - (\hat{x} \cdot y)^2}{|x| \left(1 + \left|\hat{x} - \frac{y}{|x|}\right| - \hat{x} \cdot \frac{y}{|x|}\right)} \\ &\leq \frac{|y|^2}{|x| \left(2 - 2\frac{|y|}{|x|}\right)} \leq \frac{|y|^2}{|x|}. \end{aligned}$$

Aus dem letzten Term in der ersten Zeile dieser Rechnung erkennen wir auch, dass der Ausdruck nicht-negativ ist. Somit gilt

$$|x-y| - |x| = -\hat{x} \cdot y + O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

und auch hier ist die Konvergenz wieder gleichmäßig für $y \in \partial D$. Mit der Potenzreihe für die Exponentialfunktion folgt

$$e^{ik(|x-y|-|x|)} = e^{-ik\hat{x} \cdot y} \left(1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

und daher

$$\Phi(x, y) = \gamma_2 \frac{e^{ik|x|}}{|x|^{\frac{1}{2}}} e^{-ik\hat{x} \cdot y} \left(1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Ganz analog erhält man

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)}(x, y) = \gamma_2 \frac{e^{ik|x|}}{|x|^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial e^{-ik\hat{x} \cdot y}}{\partial \nu(y)} \left(1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Beachtet man, dass die Konvergenz jeweils gleichmäßig für y aus der kompakten Menge ∂D erfolgt, kann man die Entwicklungen für die Fundamentallösung in die Darstellungsformel einsetzen und das Integral und die Grenzwerte vertauschen. Es ergibt sich das gewünschte asymptotische Verhalten für u und die Darstellungsformel für das Fernfeld. ■

Kapitel 3

Darstellungen durch radialsymmetrische Lösungen

In diesem Kapitel wollen wir die in Kapitel 1 durch Separation gefundenen Lösungen der Helmholtz-Gleichung genauer betrachten und mit ihrer Hilfe Aussagen über allgemeine Lösungen und deren Fernfelder herleiten.

Für $N = 2$ haben wir durch Separation in Polarkoordinaten die Lösungen der Helmholtz-Gleichung

$$J_n(k|x|) e^{in\varphi}, \quad Y_n(k|x|) e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

mit $x = |x|(\cos \varphi, \sin \varphi)^\top$, gefunden. Wir fassen die Ergebnisse, ergänzt um eine Aussage zur Ausstrahlungsbedingung, noch einmal zusammen.

Satz 3.1 *Die Funktionen*

$$v_n(x) = J_n(k|x|) e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

mit $x = |x|(\cos \varphi, \sin \varphi)$, sind Lösungen der Helmholtz-Gleichung in \mathbb{R}^2 . Die Funktionen

$$w_n(x) = H_n^{(1)}(k|x|) e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

sind Lösungen der Helmholtz-Gleichung im $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, die die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung erfüllen.

Beweis: Zu zeigen ist nur noch, dass $H_n^{(1)}(k|x|)$ die SAB erfüllt. Dies erfolgt analog zum entsprechenden Beweis für $H_0^{(1)}(k|x|)$, den wir im Beweis von Lemma 2.9 erbracht haben. ■

Lemma 3.2 Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ mit $|x| > |y|$ gilt

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|) = \frac{i}{4} \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_n^{(1)}(k|x|) J_n(k|y|) e^{in(\varphi_x - \varphi_y)} \\ &= \frac{i}{4} \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n(x) \overline{w_n(y)}.\end{aligned}$$

mit $x = |x| (\cos \varphi_x, \sin \varphi_x)^\top$, $y = |y| (\cos \varphi_y, \sin \varphi_y)^\top$. Die Reihe und ihre gliedweise Ableitungen konvergieren absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\{(x, y) : |x| > |y|\}$.

Beweis: Wir wenden zunächst die Darstellungssätze 2.5 bzw. 2.10 für $B_R(0)$ an. Dies liefert die Formeln

$$\begin{aligned}\int_{|y|=R} \left[\frac{\partial v_n}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} v_n(y) \right] ds(y) &= \begin{cases} v_n(x), & |x| < R, \\ 0, & |x| > R, \end{cases} \\ \int_{|y|=R} \left[\frac{\partial w_n}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - w_n(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right] ds(y) &= \begin{cases} 0, & |x| < R, \\ -w_n(x), & |x| > R. \end{cases}\end{aligned}$$

Für $|x| > R$ ergibt sich mit beiden Formeln

$$\begin{aligned}& J_n(kR) H_n^{(1)}(k|x|) e^{in\varphi_x} \\ &= -J_n(kR) \int_{|y|=R} \left[k H_n^{(1)'}(kR) \Phi(x, y) - H_n^{(1)}(kR) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right] e^{in\varphi_y} ds(y) \\ &\quad + H_n^{(1)}(kR) \int_{|y|=R} \left[k J_n'(kR) \Phi(x, y) - J_n(kR) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right] e^{in\varphi_y} ds(y) \\ &= k \int_{|y|=R} \left[J_n'(kR) H_n^{(1)}(kR) - J_n(kR) H_n^{(1)'}(kR) \right] \Phi(x, y) e^{in\varphi_y} ds(y).\end{aligned}$$

Der Integrand in diesem Integral ist gerade die Wronski-Determinante für die Bessel- und Hankel-Funktionen, für die der Wert $-\frac{2i}{\pi kR}$ bekannt ist (z.B. Abramowitz, Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Formel 9.1.16). Somit ist

$$J_n(kR) H_n^{(1)}(k|x|) e^{in\varphi_x} = -\frac{2i}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi \left(x, R \begin{pmatrix} \cos \varphi_y \\ \sin \varphi_y \end{pmatrix} \right) e^{in\varphi_y} d\varphi_y$$

Das verbleibende Integral ist gerade der Ausdruck für den n -ten Fourierkoeffizienten der bezüglich φ_y 2π -periodischen Funktion $\Phi(c, \cdot)$. Diese besitzt somit eine Fourier-Entwicklung

$$\Phi\left(x, R\begin{pmatrix} \cos \varphi_y \\ \sin \varphi_y \end{pmatrix}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(x, R) e^{-in\varphi_y}$$

mit

$$c_n(x, R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi\left(x, R\begin{pmatrix} \cos \varphi_y \\ \sin \varphi_y \end{pmatrix}\right) e^{in\varphi_y} d\varphi_y.$$

Mit dem oben berechneten Ausdruck folgt

$$\Phi(x, y) = \frac{i}{4} \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_n^{(1)}(k|x|) J_n(k|y|) e^{in(\varphi_x - \varphi_y)},$$

wobei die Reihe im Sinne des $L^2(0, 2\pi)$ bezüglich φ_y konvergiert für jedes feste x , $|y|$ mit $|x| > |y|$.

Es bleibt zu zeigen, dass die Reihe auch absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\{(x, y) : |x| > |y|\}$ konvergiert. Dazu verwenden wir Ausdrücke für das asymptotische Verhalten der Bessel- bzw. Hankel-Funktionen. Es gilt (Abramowitz, Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Formel 9.3.1)

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n n!} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad H_n^{(1)}(t) = \frac{2^n (n-1)!}{i\pi t^n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

für $n \rightarrow \infty$, und dieses Verhalten ist gleichmäßig für t aus einem kompakten Intervall. Dies liefert

$$|J_n(k|y|) H_n^{(1)}(k|x|)| = \frac{1}{\pi n} \left(\frac{|y|}{|x|}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Dies bedeutet, dass die Reihe $\left(\sum_{n \rightarrow \mathbb{Z}} \frac{1}{\pi n} \left(\frac{|y|}{|x|}\right)^n\right)$ eine absolut konvergente Majorante für die obige Fourier-Reihe ist. Für x, y aus einer kompakten Teilmenge von $\{(x, y) : |x| > |y|\}$ ergibt sich auch sofort die gleichmäßige Konvergenz.

Die Rechnung für die gliedweisen Ableitungen ist analog, man verwendet hier noch Rekursionsformeln für die Ableitungen der Bessel- und Hankel-Funktionen (etwa Abramowitz, Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Formel 9.1.27). ■

Mit Hilfe der Green'schen Darstellungssätze können wir mit dem Additionstheorem für die Fundamentallösung nun eine Darstellung von Lösungen der Helmholtz-Gleichung mit den Funktionen v_n und w_n gewinnen.

Satz 3.3

- (a) Eine Lösung $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^1(\overline{B_R(0)})$ der Helmholtz-Gleichung lässt sich für $|x| \leq \tilde{R} < R$ in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n J_n(k|x|) e^{in\varphi_x}$$

entwickeln. Konvergiert umgekehrt die Reihe in $L^2(\{|x| = R\})$, so ist die durch die Reihe definierte Funktion eine Lösung $u \in C^2(B_R(0))$ der Helmholtz-Gleichung.

- (b) Eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_R(0)}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0))$ der Helmholtz-Gleichung, die der SAB genügt, lässt sich für $|x| \geq \tilde{R} > R$ in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n H_n^{(1)}(k|x|) e^{in\varphi_x}$$

entwickeln. Konvergiert umgekehrt die Reihe in $L^2(\{|x| = R\})$, so ist die durch die Reihe definierte Funktion eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_R(0)})$ der Helmholtz-Gleichung, die der SAB genügt.

Beweis: Den jeweils ersten Teil der Aussagen erhalten wir, indem wir die Darstellungen gemäß Lemma 3.2 für Φ und die Gradienten bezüglich y in die Green'schen Darstellungsformeln aus den Sätzen 2.5 und 2.10 einsetzen und Integration und Summation vertauschen.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass die in $L^2(\{|x| = R\})$ konvergieren. Nach der Parseval'schen Gleichung ist dann

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n J_n(kR)|^2, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n H_n^{(1)}(kR)|^2 < \infty.$$

Da $H_n^{(1)}(t) \neq 0$ für $t > 0$ (denn sonst hätten J_n und Y_n eine gemeinsame Nullstelle und dies stünde im Widerspruch dazu, dass die Wronski-Determinante zweier linear unabhängige Lösungen einer linearen Differenzialgleichung für jedes t von null verschieden ist), können wir abschätzen

$$\left| \sum_{n=-M}^M b_n H_n^{(1)}(k|x|) e^{in\varphi_x} \right|^2 \leq \left(\sum_{n=-M}^M \left| \frac{H_n^{(1)}(k|x|)}{H_n^{(1)}(kR)} \right|^2 \right) \left(\sum_{n=-M}^M |b_n H_n^{(1)}(kR)|^2 \right).$$

Mit den asymptotischen Darstellungen der Hankel-Funktion für große Ordnungen (siehe Beweis von Lemma 3.2) erhalten wir

$$\left| \frac{H_n^{(1)}(k|x|)}{H_n^{(1)}(kR)} \right| = \frac{|R|^n (1 + O(\frac{1}{n}))}{|x|^n (1 + O(\frac{1}{n}))} = \left(\frac{R}{|x|} \right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Somit konvergiert die Reihe für jedes x mit $|x| > R$ absolut und definiert damit eine Lösung u der Helmholtz-Gleichung in $\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)$. Mithilfe des Additionstheorems Lemma 3.2 zeigt man für ein $\tilde{R} > R$ die Darstellung

$$u(x) = \int_{|y|=\tilde{R}} \left(\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} u(y) - \Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right) ds(y),$$

woraus sich ergibt, dass u die SAB erfüllt.

Für die Reihe über die Bessel-Funktionen gilt die analoge Abschätzung

$$\left| \sum_{n=-M}^M a_n J_n(k|x|) e^{in\varphi_x} \right|^2 \leq \left(\sum_{n=-M}^M \left| \frac{J_n(k|x|)}{J_n(kR)} \right|^2 \right) \left(\sum_{n=-M}^M |a_n J_n(kR)|^2 \right)$$

sofern $J_n(kR) \neq 0$ für alle n . Ist dies nicht der Fall, so ist für genau ein $n \in \mathbb{N}$ $J_n(kR) = 0$, und das entsprechende Glied kann getrennt berücksichtigt werden. Indem wir das asymptotische Verhalten der Bessel-Funktionen für große Ordnungen verwenden, erhalten wir

$$\left| \frac{J_n(k|x|)}{J_n(kR)} \right| = \frac{|x|^n (1 + O(\frac{1}{n}))}{R^n (1 + O(\frac{1}{n}))} = \left(\frac{|x|}{R} \right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Hiermit ergibt sich die Konvergenz der Reihe in $B_R(0)$, wo sie eine Lösung der Helmholtz-Gleichung definiert. ■

Wir wollen nun vergleichbare Resultate für $N = 3$ herleiten. In Kapitel 1 hatten wir bereits einen Lösungsansatz in Kugelkoordinaten durchgeführt,

$$u(x) = v_1(r) v_2(\vartheta) v_3(\varphi),$$

wobei $x = r (\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)^\top$, $r > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $\vartheta \in (0, \pi)$. Dieser Ansatz führte auf das folgende Differenzialgleichungssystem für die Funktionen v_j :

$$\begin{aligned} (r^2 v_1'(r))' + (k^2 r^2 + \lambda) v_1(r) &= 0, \\ \sin \vartheta (\sin \vartheta v_2'(\vartheta))' - (m^2 + \lambda \sin^2 \vartheta) v_2(\vartheta) &= 0, \\ v_3''(\varphi) - m^2 v_3(\varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Die Konstanten m und λ koppeln die Gleichungen und müssen entsprechend gewählt werden. Wie im Fall $N = 2$, ergibt sich aus der Bedingung an v_3 , 2π -periodisch zu sein, die Bedingung $m \in \mathbb{Z}$ und

$$v_3(\varphi) = e^{im\varphi}.$$

Bedingungen an λ werden sich im folgenden ergeben.

Bemerkung 3.4 Alternativ kann man den Ansatz auch als

$$u(x) = v_1(r)Y(\varphi, \vartheta)$$

schreiben. Die Differentialgleichungen bezüglich ϑ und φ erscheinen dann als eine einzelne partielle Differentialgleichung

$$BY = \lambda Y,$$

mit dem Differentialoperator

$$BY = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right).$$

Man nennt B auch den **Laplace-Beltrami-Operator**. Es sind also Eigenwerte und Eigenfunktionen für B zu finden.

Für $N = 2$ war der entsprechende Operator $\frac{d^2}{d\varphi^2}$ mit periodischen Randbedingungen, den Eigenwerten $-n^2$, $n \in \mathbb{Z}$, und den Eigenfunktionen $e^{in\varphi}$, die ein vollständiges Orthogonalsystem des $L^2(\mathbb{S}^1)$ bilden. Ganz analog wollen wir versuchen, ein vollständiges Orthogonalsystem des $L^2(\mathbb{S}^2)$ aus Eigenfunktionen von B zu finden.

◀

Wir befassen uns zunächst mit der Suche nach Lösungen der Differentialgleichung für ϑ . Setzt man $t = \cos \vartheta \in (-1, 1)$ für $\vartheta \in (0, \pi)$ und $w(t) = v_2(\vartheta)$, so erhält man die Differentialgleichung

$$(1 - t^2)w''(t) - 2tw'(t) - \left(\lambda + \frac{m^2}{1 - t^2} \right)w(t) = 0, \quad t \in (-1, 1).$$

Diese Gleichung heißt **zugeordnete Legendre'sche Differentialgleichung**. Im Spezialfall $m = 0$ handelt es sich um die **Legendre'sche Differentialgleichung**. Wir stellen einige Aussagen zu deren Lösung zusammen.

Satz und Definition 3.5

- (a) Zu $\lambda = -n(n+1)$, $n \in \mathbb{N}_0$ existiert genau eine Lösung $P_n \in C^2(-1, 1) \cap C([-1, 1])$ der Legendre'schen Differentialgleichung mit $P_n(1) = 1$. P_n ist ein Polynom vom Grad n und wird **Legendre-Polynom** genannt.
- (b) Zu $\lambda \neq -n(n+1)$ existiert keine nicht-triviale Lösung der Legendre'schen Differentialgleichung in $C^2(-1, 1) \cap C([-1, 1])$.

Beweis: Man beweist die Aussagen, in dem man einen Potenzreihenansatz mit Entwicklungspunkt 0 macht. Für $\lambda \neq -n(n+1)$ hat die Reihe den Konvergenzradius 1 und divergiert in den Randpunkten. Für Details siehe die Literatur. ■

Satz 3.6 Für die Legendre-Polynome gilt

- (a) $\text{Grad } P_n = n$, $n \in \mathbb{N}_0$,
- (b) $\int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dt = 0$, $n \neq m$,
- (c) $P_n(1) = 1$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Umgekehrt sind die Legendre-Polynome (P_n) durch diese drei Bedingungen eindeutig festgelegt.

Beweis: In dem man die Monome $1, t, t^2, \dots$ mit dem Gram-Schmidt'schen Verfahren orthogonalisiert und die Orthogonalfolge durch $P_n(1) = 1$ normalisiert, sieht man, dass durch die drei Bedingungen eine eindeutige Familie von Polynomen bestimmt ist. Von den Legendre-Polynomen wissen wir bereits, dass sie die erste und die dritte Eigenschaft besitzen. Zeigt man, dass die Legendre-Polynome ebenfalls in $L^2(-1, 1)$ paarweise orthogonal sind, so müssen beide Polynomfolgen übereinstimmen.

Zum Beweis zeigen wir zunächst, dass man die Legendre-Polynome auch auf eine andere Art und Weise gewinnen kann. Es seien $x, y \in \mathbb{R}^3$ mit $r = |x| < |y| = 1$. Wir setzen

$$\frac{x}{|x|} \cdot y = \cos \vartheta = t.$$

Nun entwickeln wir $|x - y|^{-1}$ als Funktion von r in eine Potenzreihe, deren Koeffizienten noch von t abhängen:

$$\frac{1}{|x - y|} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tr + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) r^n.$$

Wir zeigen, dass diese Koeffizienten gerade die Legendre-Polynome sind. Einer Formelsammlung entnehmen wir die Gleichung

$$(1 - z)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} z^n, \quad |z| \leq 1.$$

Insbesondere konvergieren die Reihen

$$(1 - r e^{\pm i\vartheta})^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} r^n e^{\pm i n \vartheta}$$

und ihre gliedweisen partiellen Ableitungen absolut und gleichmäßig für $0 \leq r \leq r_0 < 1$ und $0 \leq \vartheta \leq \pi$. Aus der Identität

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tr + r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - r(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) + r^2}} = (1 - r e^{i\vartheta})^{-1/2} (1 - r e^{-i\vartheta})^{-1/2}$$

folgt, dass auch die Taylorreihe für $|x - y|^{-1}$ und alle gliedweisen partiellen Ableitungen absolut und gleichmäßig für $|x| \leq r_0$ konvergieren.

Indem wir die Potenzreihe ableiten, erhalten wir

$$\frac{t - r}{(1 - 2tr + r^2)^{3/2}} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{(1 - 2tr + r^2)^{1/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(t) r^{n-1}.$$

Multiplikation mit $1 - 2tr + r^2$ liefert

$$(t - r) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) r^n = (1 - 2tr + r^2) \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(t) r^{n-1}$$

Indem wir alles ausmultiplizieren und passende Indexverschiebungen in den Reihen durchführe, erhalten wir

$$t P_0(t) - P_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [-(n+1) P_{n+1}(t) + (2n+1) t P_n(t) - n P_{n-1}(t)] r^n = 0.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert, dass sämtliche Koeffizienten in der Potenzreihe links verschwinden. Es folgt die dreigliedrige Rekursionsformel

$$(n+1) P_{n+1}(t) = (2n+1) t P_n(t) - n P_{n-1}(t) \quad n \in \mathbb{N}.$$

Elementar bestimmt man die ersten Koeffizienten $P_0(t) = 1$ und $P_1(t) = t$. Diese sind Polynome vom Grad n mit $P_n(1) = 1$, $n = 1, 2$. Aus der Rekursionsformel ergibt sich nun sofort, dass auch P_{n+1} , $n \in \mathbb{N}$ ein Polynom vom Grad n ist mit

$$(n+1) P_{n+1}(1) = (2n+1) P_n(1) - n P_{n-1}(1).$$

Eine vollständige Induktion liefert $P_n(1) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Um einzusehen, dass die P_n die Legendre-Polynome sind, beachten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_x(P_n(t) r^n) = \Delta_x \frac{1}{|x-y|} = 0.$$

In Kugelkoordinaten schreibt sich $\Delta_x = \frac{1}{r^2} \left(B + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \right)$ (siehe Beispiel 1.5), und wir erhalten

$$\sum_{n=0}^{\infty} [BP_n(\cos \vartheta) + n(n+1)P_n(\cos \vartheta)] r^{n-2} = 0.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt, dass $P_n(\cos \vartheta)$ Eigenfunktion des Laplace-Beltrami-Operators zum Eigenwert $-n(n+1)$ sind, d.h. Lösungen der Legendre'schen Differentialgleichung. Satz 3.5 ergibt nun, dass die P_n die Legendre-Polynome sind.

Mit $BP_n(\cos \vartheta) + n(n+1)P_n(\cos \vartheta) = 0$ folgt nun andererseits, dass die Funktion $H_n(z) = P_n(\cos \vartheta) r^n$, $z = r(\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)^\top$, harmonisch ist. Somit gilt mit der zweiten Green'schen Identität für $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_1(0)} (\overline{H_m} \Delta H_n - H_n \Delta \overline{H_m}) dz = \int_{\mathbb{S}^2} \left(\overline{H_m} \frac{\partial H_n}{\partial r} - H_n \frac{\partial \overline{H_m}}{\partial r} \right) ds(z) \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} (n-m) P_n(\cos \vartheta) P_m(\cos \vartheta) ds(z) \\ &= (n-m) \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi P_n(\cos \vartheta) P_m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \\ &= 2\pi (n-m) \int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dt. \end{aligned}$$

Ist also $n \neq m$, so sind P_n und P_m im $L^2(-1, 1)$ orthogonal. ■

Bemerkung 3.7 Man kann die Legendre-Polynome auch explizit ausrechnen. Es gilt die Formel von Rodriguez

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dt} \right)^n (t^2 - 1)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$



Lemma 3.8 Für $n \in \mathbb{N}$, $m \in \{-n, \dots, n\}$, sind die zugeordneten Legendre-Funktionen

$$P_n^m(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t),$$

Lösungen der zugeordneten Legendre'schen Differentialgleichung.

Beweis: Man setzt die Funktionen ein und rechnet nach. ■

Es folgt mit

$$\tilde{Y}_n^m(\hat{x}) = P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

für $n \in \mathbb{N}_0$, $-n \leq m \leq n$, dass

$$B\tilde{Y}_n^m(\hat{x}) = -n(n+1)\tilde{Y}_n^m(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2,$$

ist. Indem wir \tilde{Y}_n^m noch mit r^n multiplizieren, erhalten wir eine harmonische Funktion.

Definition 3.9 $Y : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Kugelfunktion** der Ordnung n , falls

$$h(x) = |x|^n Y\left(\frac{x}{|x|}\right), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

harmonisch ist. In diesem Fall ist

$$BY = -n(n+1)Y.$$

Werden die oben definierten aus den zugeordneten Legendre-Funktionen gebildeten Kugelfunktionen noch normiert, so ergibt sich ein Orthonormalsystem.

Satz 3.10 Die Kugelfunktionen

$$Y_n^m(\hat{x}) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$, $m = -n, \dots, n$, bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{S}^2)$.

Beweis: Colton/Kress 1998, Theorem 2.7. ■

Satz 3.11 (Additionstheorem) Es gilt

$$\sum_{m=-n}^n Y_n^m(\hat{x}) \overline{Y_n^m(\hat{y})} = \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos \vartheta),$$

wobei $\vartheta = \arccos(\hat{x} \cdot \hat{y})$, $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{S}^2$.

Beweis: Colton/Kress 1998, Theorem 2.8 ■

Satz 3.12 Funktionen der Form

$$v_{n,m}(x) = j_n(k|x|) Y_n^m(\hat{x}), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad |m| \leq n,$$

sind Lösungen der Helmholtz-Gleichung im \mathbb{R}^3 . Funktionen der Form

$$w_{n,m}(x) = h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m(\hat{x}), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad |m| \leq n,$$

sind Lösungen im $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, die die SAB erfüllen.

Beweis: Ganz analog wie der Beweis von Satz 3.1 in 2D. ■

Lemma 3.13 Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ mit $|x| > |y|$ gilt

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = ik \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n h_n^{(1)}(k|x|) j_n(k|y|) Y_n^m(\hat{x}) \overline{Y_n^m(\hat{y})} \\ &= ik \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n w_{n,m}(x) \overline{v_{n,m}(y)}. \end{aligned}$$

Die Reihe und ihre gliedweisen Ableitungen bezüglich $|x|$ und $|y|$ konvergieren absolut und gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\{|x| > |y|\}$.

Beweis: Da $\{Y_n^m\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{S}^2)$ ist, gibt es eine Darstellung als Fourier-Reihe bezüglich \hat{y} ,

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{n,m}(x, |y|) \overline{Y_n^m(\hat{y})}$$

mit

$$a_{n,m}(x, |y|) = \int_{\mathbb{S}^2} \Phi(x, |y|\hat{y}) Y_n^m(\hat{y}) ds(\hat{y}).$$

Die Berechnung dieser Koeffizienten und der Nachweis der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz erfolgen analog zum Beweis von Lemma 3.2. ■

Wie im zweidimensionalen Fall kann auf der Basis des Additionstheorems für die Grundlösung nun eine Darstellung von Lösungen der Helmholtz-Gleichung als Reihe über Bessel- bzw. Hankel-Funktionen multipliziert mit Kugelfunktionen angegeben werden.

Satz 3.14 (Entwicklung in 3D)

(a) Eine Lösung $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^1(\overline{B_R(0)})$ der Helmholtzgleichung lässt sich für $|x| \leq \tilde{R} < R$ in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{n,m} j_n(k|x|) Y_n^m(\hat{x})$$

mit $x = |x|\hat{x}$, $\hat{x} \in S^2$, entwickeln. Konvergiert die Reihe in $L^2(\partial B_R(0))$, so ist die durch die Reihe definierte Funktion eine Lösung der Helmholtz-Gleichung in $B_R(0)$.

(b) Eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0))$, die der SAB genügt, lässt sich für $|x| \geq \tilde{R} > R$ in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{n,m} h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m(\hat{x})$$

mit $x = |x|\hat{x}$, $\hat{x} \in S^2$, entwickeln. Konvergiert die Reihe in $L^2(\partial B_R(0))$, so ist die durch die Reihe definierte Funktion eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)})$ der Helmholtz-Gleichung, die der SAB genügt.

Beweis: Analog zu Satz 3.3. ■

Von besonderem Interesse sind nun die Konsequenzen für ausstrahlende Lösungen der Helmholtz-Gleichung und für deren Fernfelder, die aus den Darstellungssätzen 3.3 bzw. 3.14 gewonnen werden können. Wir geben hier nur das Ergebnis in drei Raumdimensionen an, für $N = 2$ gilt ein analoges Resultat.

Satz 3.15 Ist $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)})$ eine Lösung der Helmholtz-Gleichung mit der Reihendarstellung

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{n,m} h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m(\hat{x}),$$

so ist ihr Fernfeld durch die Reihe

$$u_{\infty}(\hat{x}) = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1} \sum_{m=-n}^n b_{n,m} Y_n^m(\hat{x})$$

gegeben, die gleichmäßig konvergiert.

Beweis: Wir starten mit der Fourier-Entwicklung des Fernfelds in Kugelfunktionen,

$$u_\infty(\hat{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \gamma_{n,m} Y_n^m(\hat{x}),$$

wobei für die Koeffizienten gilt:

$$\gamma_{n,m} = \int_{S^2} u_\infty(\hat{x}) \overline{Y_n^m(\hat{x})} \, ds(\hat{x}).$$

Wir setzen für u_∞ dessen Definition ein und erhalten mit der Reihendarstellung von u

$$\begin{aligned} \gamma_{n,m} &= \int_{S^2} \lim_{r \rightarrow \infty} (r e^{-ikr} u(r\hat{x})) \overline{Y_n^m(\hat{x})} \, ds(\hat{x}) = \lim_{r \rightarrow \infty} r e^{-ikr} \int_{S^2} u(r\hat{x}) \overline{Y_n^m(\hat{x})} \, ds(\hat{x}) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} r e^{-ikr} \int_{S^2} \sum_{\tilde{n}=0}^{\infty} \sum_{\tilde{m}=-\tilde{n}}^{\tilde{n}} b_{\tilde{n},\tilde{m}} h_{\tilde{n}}^{(1)}(kr) Y_{\tilde{n}}^{\tilde{m}}(\hat{x}) \overline{Y_n^m(\hat{x})} \, ds(\hat{x}) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} r e^{-ikr} b_{n,m} h_n^{(1)}(kr) = \frac{b_{n,m}}{k} (-i)^{n+1}. \end{aligned}$$

Die Vertauschung von Grenzwert und Integral ist möglich, da der Grenzwert gleichmäßig für alle Richtungen \hat{x} angenommen wird. Die letzte Gleichheit folgt aus dem asymptotischen Verhalten der sphärischen Hankel-Funktionen für große Argumente (Abramowitz und Stegun, Formel 9.2.3 sowie 10.1.1),

$$h_n^{(1)}(t) = \frac{1}{t} e^{i(t - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2})} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad t \rightarrow \infty.$$

Ausgangspunkt für den Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe ist die Parseval'sche Gleichung

$$r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |b_{n,m} h_n^{(1)}(kr)|^2 = r^2 \int_{S^2} |u(r\hat{x})|^2 \, ds(\hat{x}) = \int_{\partial B_R(0)} |u(x)|^2 \, ds(x)$$

Da (Abramowitz und Stegun, Formel 9.3.1 sowie 10.1.1)

$$h_n^{(1)}(t) = O\left(\left(\frac{2n}{et}\right)^n\right) \quad (n \rightarrow \infty),$$

folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n}{ekr}\right)^{2n} \sum_{m=-n}^n |b_{n,m}|^2 < \infty \quad \text{für jedes } r > R.$$

Mit der Cauchy-Scharz'schen Ungleichung im Folgenraum ℓ^2 ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |b_{n,m} Y_n^m(\hat{x})| \right)^2 &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n}{e kr} \right)^{2n} \sum_{m=-n}^n |b_{n,m}|^2 \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e kr}{2n} \right)^{2n} \sum_{m=-n}^n |Y_n^m(\hat{x})|^2 \right) \end{aligned}$$

Satz 3.11 liefert die Gleichmäßigkeit der Konvergenz, denn

$$\sum_{m=-n}^n |Y_n^m(\hat{x})|^2 = \frac{2n+1}{4\pi}.$$

■

Satz 3.16 Gegeben sei $u_\infty \in L^2(S^2)$ mit der Fourierentwicklung

$$u_\infty(\hat{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \gamma_{n,m} Y_n^m(\hat{x}).$$

Falls für ein $R > 0$ die Bedingung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n}{e k R} \right)^{2n} \sum_{m=-n}^n |\gamma_{n,m}|^2 < \infty$$

erfüllt ist, so ist durch

$$u(x) = k \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i^{n+1} \gamma_{n,m} h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m \left(\frac{x}{|x|} \right), \quad |x| > R,$$

eine Lösung der Helmholtz-Gleichung gegeben, die die SAB erfüllt und deren Feinfeld u^∞ ist.

Beweis: Die Parseval'sche Gleichung in $L^2(S^2)$ und das asymptotische Verhalten der sphärischen Hankel-Funktionen für große Ordnungen (Abramowitz und Stegun, Formel 9.3.1 sowie 10.1.1) liefern

$$\|u\|_{L^2(\{|x|=R\})}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |\gamma_{n,m} h_n^{(1)}(kR)|^2 \leq C \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left| \gamma_{n,m} \left(\frac{2n}{e k R} \right)^{2n} \right|^2 < \infty.$$

Aus Satz 3.14 (b) folgt, dass u eine Lösung der Helmholtz-Gleichung ist, die die SAB erfüllt. Aus Satz 3.15 ergibt sich nun, dass das Fernfeld von u durch u_∞ gegeben ist. ■

Kommentar: Die Sätze 3.15 und 3.16 besagen gemeinsam, dass es eine bijektive lineare Beziehung zwischen den Lösungen der Helmholtz-Gleichung, die der SAB genügen, und deren Fernfeldern gibt. Insbesondere bedeutet ein verschwindendes Fernfeld, dass auch das gestreute Feld null ist.

Zwar kann aus einem Fernfeld das zugehörige gestreute Feld eindeutig bestimmt werden, aber es handelt sich hierbei um ein **schlecht gestelltes Problem**: Beliebige kleine Änderungen im Fernfeld können beliebig große Änderungen im gestreuten Feld bewirken. Als Beispiel betrachten wir ein gestreutes Feld u^s mit dem dazugehörigen Fernfeld u_∞ und definieren für $\delta > 0$

$$u_\infty^\delta = u_\infty + \delta Y_n^m.$$

Es wird also der Fourier-Koeffizient $\gamma_{n,m}$ um δ gestört und es gilt

$$\|u_\infty^\delta - u_\infty\|_{L^2(\mathbb{S}^2)} = \delta.$$

Gemäß Satz 3.16 erhalten wir das zugehörige gestreute Feld $u^{s,\delta}$ außerhalb einer geeignet gewählten Kugel $B_R(0)$ als

$$u^{s,\delta} = u^s + \delta k i^{n+1} h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m(\hat{x}), \quad |x| > R.$$

Für $r > R$ schätzen wir nun die L^2 -Norm von $u^{s,\delta} - u^s$ im Kreisring $D = B_r(0) \setminus \overline{B_R(0)}$ mittels des asymptotischen Verhaltens der sphärischen Hankel-Funktion nach unten ab:

$$\begin{aligned} \|u^{s,\delta} - u^s\|_{L^2(D)}^2 &= \delta^2 k^2 \int_R^r \rho^2 |h_n^{(1)}(k\rho)| d\rho \int_{\mathbb{S}^2} |Y_n^m(\hat{x})|^2 ds \\ &\geq C \delta^2 k^2 \int_R^r \rho^2 \left(\frac{2n}{e k \rho} \right)^{2n} d\rho \longrightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Es ist nicht schwer, dieses Ergebnis vom Kreisring auf den Fall einer beliebigen kompakten Teilmenge des \mathbb{R}^3 zu erweitern.

Zum Abschluss präsentieren wir einen Satz, der besagt, dass Lösungen der Helmholtz-Gleichung im Außenraum bereits verschwinden, wenn sie ein hinreichend schnelles Abfallverhalten für große Argumente aufweisen. Wir werden diese Aussage in den Beweisen der Eindeutigkeit der Lösungen von Streuproblemen verwenden.

Satz 3.17 (Lemma von Rellich/Kupradze) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^N$ beschränkt und $u \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \overline{D})$ eine Lösung der Helmholtz-Gleichung. Gilt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |u(x)|^2 ds = 0,$$

so ist $u = 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus \overline{D}$.

Beweis: Wir führen den Beweis für $N = 3$, der Fall $N = 2$ geht aber ganz analog. Es sei $\overline{D} \subseteq B_r(0)$. Da die Kugelfunktionen ein vollständiges Orthonormalsystem bilden, können wir u entwickeln als

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{n,m}(|x|) Y_n^m(\hat{x}), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus B_r(0),$$

mit

$$a_{n,m}(R) = \int_{\mathbb{S}^2} u(R\hat{x}) \overline{Y_n^m(\hat{x})} ds, \quad R \geq r.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_R(0)} |u(x)|^2 ds &= R^2 \int_{\mathbb{S}^2} |u(R\hat{x})|^2 ds \\ &= R^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n |a_{n,m}(R)|^2 \longrightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Insbesondere folgt $R a_{n,m}(R) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ für alle (n, m) .

Aus den Separationsansätzen aus Kapitel 1 ist klar, dass $a_{n,m}$ Lösung der Differentialgleichung

$$(R^2 a'_{n,m}(R))' + (k^2 R^2 - n(n+1)) a_{n,m}(R) = 0$$

ist. Somit ist

$$a_{n,m}(R) = \alpha_{n,m} h_n^{(1)}(kR) + \beta_{n,m} h_n^{(2)}(kR).$$

Mit dem asymptotischen Verhalten der sphärischen Hankel-Funktionen für große Argumente (siehe Beweis von Satz 3.15 folgt aus $R a_{n,m}(R) \rightarrow 0$ nun $\alpha_{n,m} = \beta_{n,m} = 0$. ■

Kapitel 4

Formulierung direkter Streuprobleme

In diesem Abschnitt wenden wir uns der Formulierung direkter Streuprobleme als Randwertprobleme für die Helmholtz-Gleichung in Außengebieten zu. Wir werden dabei klassische Funktionenräume stetig differenzierbarer Funktionen verwenden. In der neueren Literatur werden stattdessen Hilbert-Räume von Funktionen mit schwächeren Differenzierbarkeitseigenschaften verwendet. Insbesondere die Herleitung geeigneter Begriffe für Randwerte ist aber technisch aufwändig. Später in der Vorlesung werden wir auch diesen Zugang anreißen.

Definition 4.1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^N$, $N = 2, 3$, offen und beschränkt mit C^2 -Rand. Wir betrachten hierzu:

- das **innere Dirichlet Problem**: finde zu $f \in C(\partial D)$ eine Lösung $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ der Helmholtz-Gleichung in D mit

$$u = f \quad \text{auf } \partial D,$$

- das **innere Neumann Problem**: finde zu $g \in C(\partial D)$ eine Lösung $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ der Helmholtz-Gleichung in D mit

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{auf } \partial D$$

- das **äußere Dirichlet Problem**: finde zu $f \in C(\partial D)$ eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \overline{D}) \cap C(\mathbb{R}^N \setminus D)$ der Helmholtz-Gleichung in $\mathbb{R}^N \setminus \overline{D}$, die der SAB genügt und

$$u = f \quad \text{auf } \partial D$$

erfüllt,

- das **äußere Neumann Problem**: finde zu $g \in C(\partial D)$ eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^N \setminus D)$ der Helmholtz-Gleichung in $\mathbb{R}^N \setminus \overline{D}$, die der SAB genügt und

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{auf } \partial D$$

erfüllt.

Kommentar: Streuprobleme sind spezielle äußere Randwertprobleme mit $f = u^i|_{\partial D}$ bzw. $g = \frac{\partial u^i}{\partial \nu}|_{\partial D}$, wobei u^i Lösung der Helmholtz-Gleichung in einer Umgebung von ∂D ist.

Satz 4.2 Das äußere Dirichlet- und das äußere Neumann-Problem besitzen höchstens eine Lösung.

Um den Satz im Falle des Dirichlet Problems beweisen zu können, benötigen wir das folgende Lemma

Lemma 4.3 Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^N \setminus D)$ eine Lösung der Helmholtz-Gleichung in $\mathbb{R}^N \setminus \overline{D}$ mit $u = 0$ auf ∂D . Setze für hinreichend großes R

$$\Omega_R = \{y \in \mathbb{R}^N \setminus D : |y| < R\}.$$

Dann ist $\nabla u \in L^2(\Omega_R)$ und

$$\int_{\Omega_R} \left(|\nabla u(x)|^2 dx - k^2 \int_{\Omega_R} |u(x)|^2 \right) ds = \int_{|x|=R} u(x) \overline{\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)} ds.$$

Beweis:

- Wir beweisen die Aussage zunächst für den Fall, dass u reellwertig ist. Wähle $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ mit folgenden Eigenschaften: ψ sei ungerade, es gelte $\psi(t) = 0$ für $0 \leq t \leq 1$, $\psi(t) = t$ für $t \geq 2$ und $\psi'(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Setze nun

$$u_n(x) = \frac{\psi(nu(x))}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus D$$

Da ein c existiert mit $|u_n(x)| \leq c|u(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}^N \setminus D$ und alle $n \in \mathbb{N}$, folgt

$$|u_n(x) - u(x)| \begin{cases} = 0, & |u(x)| \geq \frac{2}{n} \\ \leq 2|u(x)| \leq \frac{2c}{n}, & |u(x)| < \frac{2}{n} \end{cases}$$

Somit gilt $\|u - u_n\|_\infty \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) auf $\mathbb{R}^N \setminus D$.

Ferner ist $u_n \equiv 0$ in einer Umgebung von ∂D . Wir können also die erste Greensche Identität anwenden (zunächst in $\Omega_R \setminus \tilde{D}$ mit $\bar{D} \subseteq \tilde{D}$ offen und $u_n \equiv 0$ in $\tilde{D} \setminus \bar{D}$) und erhalten

$$\int_{\Omega_R \setminus \tilde{D}} (u_n \Delta u + \nabla u_n \cdot \nabla u) \, dx = \int_{\partial(\Omega_R \setminus \tilde{D})} u_n \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds$$

und daher

$$\int_{\Omega_R} \nabla u_n \cdot \nabla u \, dx = k^2 \int_{\Omega_R} u_n u \, dx + \int_{|x|=R} u_n \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds \quad (4.1)$$

Es gilt

$$\nabla u_n(x) \cdot \nabla u(x) = \psi'(nu(x)) |\nabla u(x)|^2 \rightarrow |\nabla u(x)|^2 \quad (n \rightarrow \infty),$$

für alle $x \in \Omega_R \setminus \{y : u(y) = 0, \nabla u(y) \neq 0\}$.

Im zweiten Beweisschritt werden wir gleich nachweisen: $\{y \in \Omega_R : u(y) = 0, \nabla u(y) \neq 0\}$ ist eine Nullmenge. Also gilt $\nabla u_n \cdot \nabla u \rightarrow |\nabla u|^2$ fast überall. Die rechte Seite von (4.1) ist beschränkt. Nach dem Lemma von Fatou (z.B. Heuser, Analysis II, Lemma 126.3) ist also $\nabla u \in L^2(\Omega_R)$ und es gilt

$$\int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 \, dx - k^2 \int_{\Omega_R} |u|^2 \, dx = \int_{|x|=R} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds.$$

(ii) Wir zeigen $M = \{y \in \Omega_R : u(y) = 0, \partial_N u(y) \neq 0\}$ ist eine Nullmenge.

Sei $z = (\tilde{z}, z_N) \in M$. Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^{N-1}$ von \tilde{z} und $W \subseteq \mathbb{R}$ von z_N , in denen die Menge

$\{y = (\tilde{y}, y_N) \in U \times W : u(y) = 0\}$ Graph einer stetigen Funktion $\varphi : \tilde{y} \mapsto y_N$ ist. Damit ist dies eine Nullmenge.

Zu \tilde{z} existiert $\tilde{q} \in U \cap \mathbb{Q}^{N-1}$ und $\rho \in \mathbb{Q}_{>0}$ mit $\tilde{z} \in B_\rho(\tilde{q}) \subseteq U$. Wir definieren $\alpha : \tilde{z} \mapsto (\tilde{q}, \rho)$. Dann folgt

$$M \subseteq \bigcup_{(\tilde{q}, \rho) \in \text{Bild}(\alpha)} \{(\tilde{y}, y_N) \in \mathbb{R}^N : \tilde{y} \in B_\rho(\tilde{q}), y_N = \varphi(\tilde{y})\}.$$

Jede der Mengen in der Vereinigung ist eine Nullmenge, das Bild von α ist abzählbar. Somit ist M Teilmenge einer abzählbaren Vereinigung von Nullmengen, also selbst Nullmenge.

(iii) Es bleibt der Fall zu betrachten, dass u komplexwertig ist. Wir schreiben

$$u = v + i w \quad \text{mit reellwertigem } v, w.$$

Aufgrund der Linearität der Helmholtz-Gleichung sind dann auch v, w Lösungen. Nach (i) gilt $\nabla v, \nabla w \in L^2(\Omega_R)$. Mit v_n, w_n definiert wie u_n in (i) folgt

$$|(\nabla v_n + i \nabla w_n) \cdot \nabla \bar{u}| \leq 2 \|\psi'\|_\infty |\nabla u|^2.$$

Die Formel für ∇u ergibt sich somit aus (4.1) für v_n, w_n und dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz. ■

Beweis von Satz 4.2

Wir definieren Ω_R wie im Lemma 4.3. Für beide äußeren Probleme erhalten wir

$$\int_{\Omega_R} (|\nabla u(x)|^2 - k^2 |u|^2) dx = \int_{|x|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds.$$

Der Imaginärteil dieser Gleichung ist

$$\text{Im} \int_{|x|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds = 0.$$

In der letzten Formel im Beweis von Satz 2.10 hatten wir für ein u , das die SAB erfüllt, erhalten

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|x|=r} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 + k^2 |u|^2 \right] ds = -2k \text{Im} \int_{|x|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds.$$

Also ist insbesondere $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|x|=r} |u|^2 ds = 0$ und aus Rellich's Lemma (Satz 3.17) erhalten wir $u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus \overline{D}$. ■

Kommentar: Es gibt Alternativen zum technischen Lemma 4.3:

- Man kann allgemeine Regularitätsaussagen für Lösungen elliptischer partieller Differenzialgleichungen verwenden (siehe z.B. das Buch von Gilbarg/Trudinger). Diese liefern $u \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus D)$ bei unseren Regularitätsvoraussetzungen.
- Man kann eine Formulierung als Variationsproblem verwenden. Es muss dann der Begriff einer schwachen Lösung eingeführt werden. Insbesondere die Definition geeigneter Räume für Randwerte ist technisch schwierig.

Zum Nachweis der Existenz von Lösungen werden wir Methoden der Potentialtheorie verwenden. Im Kapitel 2 hatten wir schon gesehen, dass die Singularitäten für $|x - y| \rightarrow 0$ der Fundamentallösungen der Helmholtz-Gleichung mit den Singularitäten der Fundamentallösungen der Laplace-Gleichung übereinstimmt. Die Differenz zwischen beiden Funktionen ist (für festes k) analytisch im $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Damit ergeben sich viele der folgenden Aussagen über **Potentiale** für $N = 2$ wie in Kapitel 4 der Vorlesung „Integralgleichungen“.

Definition 4.4 Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^N$ beschränkt mit C^2 -glattem Rand und $\varphi \in C(\partial D)$. Dann heißt

$$\text{SL } \varphi(x) = \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \partial D,$$

Einfachschichtpotential und

$$\text{DL } \varphi(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \partial D,$$

Doppelschichtpotential mit Dichte φ auf ∂D .

Satz 4.5 Die Potentiale v, w sind Lösungen der Helmholtz-Gleichung in D und $\mathbb{R}^N \setminus \overline{D}$ und erfüllen die SAB.

Beweis: Für $x \notin \partial D$, $y \in \partial D$ sind $\Phi(\cdot, \cdot)$ und $\frac{\partial \Phi(\cdot, \cdot)}{\partial \nu(y)}$ beliebig oft stetig differenzierbar. Also ist eine Differenziation bzgl. x mit der Integration bzgl. y vertauschbar

(Differenzierbarkeit von Parameterintegralen). Da $\Phi(\cdot, y)$ Lösung der Helmholtz-Gleichung ist, sind es auch $SL\varphi$ und $DL\varphi$. Da D beschränkt und somit ∂D kompakt ist, folgt mit Lemma 2.9, dass $SL\varphi$ bzw. $DL\varphi$ die SAB erfüllen, da $\Phi(\cdot, y)$ dies gleichmäßig für $y \in \partial D$ tut. ■

Ziel wird es sein, Lösungen der Dirichlet- und Neumann-Probleme aus diesen Potentialen zu konstruieren. Dazu ist es notwendig, das Verhalten der Potentiale auf ∂D zu ermitteln. Um diese sogenannten **Sprungbeziehungen** herzuleiten, müssen wir uns genauer mit Eigenschaften der Ränder glatter Gebiete auseinandersetzen.

Lemma 4.6 *Ist ∂D C^2 -glatt und beschränkt, so existiert $L > 0$ mit*

$$\begin{aligned} |\nu(y) \cdot (x - y)| &\leq L|x - y|^2, \\ |\nu(x) - \nu(y)| &\leq L|x - y|, \end{aligned} \quad \text{für alle } x, y \in \partial D.$$

Beweis: Wir führen den Beweis nur für $N = 3$, für $N = 2$ siehe Kress, Linear Integral Equations, Lemma 6.15 (viel einfacher) oder Lemma 4.2 aus der Vorlesung über Integralgleichungen.

Sei $z \in \partial D$. Dann existiert eine abgeschlossene Kreisscheibe $V \subseteq \mathbb{R}^2$, $z \in W \subseteq \partial D$ und $\eta : V \rightarrow W$ zweimal stetig differenzierbar. Für $x, y \in W$ existieren $u, v \in V$ mit $x = \eta(u)$, $y = \eta(v)$. Wir definieren die Skalarprodukte der Tangentialvektoren

$$g_{jk}(z) = \partial_j \eta(z) \cdot \partial_k \eta(z), \quad z \in V, \quad j, k = 1, 2.$$

Da $\partial_1 \eta, \partial_2 \eta$ stets linear unabhängig sind, ist

$$|\partial_1 \eta(z) \cdot \partial_2 \eta(z)| < |\partial_1 \eta(z)| |\partial_2 \eta(z)|, \quad z \in V,$$

und somit ist

$$g(z) = \det(g_{jk}(z)) = |\partial_1 \eta(z)|^2 |\partial_2 \eta(z)|^2 - [\partial_1 \eta(z) \cdot \partial_2 \eta(z)]^2 > 0, \quad z \in V.$$

Insbesondere ist die Matrix (g_{jk}) stets positiv definit.

Mit dem Satz von Taylor schreiben wir

$$x - y = \eta(u) - \eta(v) = \eta'(\tilde{u})(u - v)$$

mit \tilde{u} auf der Verbindungsstrecke von u und v . Es folgt

$$(x - y) \cdot (x - y) = \sum_{j,k=1}^2 g_{jk}(\tilde{u})(u_j - v_j)(u_k - v_k).$$

Aus der Positiv-Definitheit von (g_{jk}) und der Stetigkeit der ersten partiellen Ableitungen von η auf V ergibt sich die Existenz zweier Konstanten $c, C > 0$ mit

$$c|u - v|^2 \leq |x - y|^2 \leq C|u - v|^2, \quad u, v \in V. \quad (4.2)$$

Wir wenden wieder den Satz von Taylor an und erhalten

$$\begin{aligned} & \nu(\eta(v)) \cdot (\eta(u) - \eta(v)) \\ &= \nu(\eta(v)) \cdot \left(\eta'(v)(u - v) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^2 \partial_j \partial_k \eta(\hat{u})(u_j - v_j)(u_k - v_k) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^2 \nu(\eta(v)) \cdot \partial_j \partial_k \eta(\hat{u})(u_j - v_j)(u_k - v_k), \end{aligned}$$

wiederum mit \hat{u} auf der Verbindungsstrecke von u und v . Damit erhalten wir die Existenz einer Konstanten $D > 0$ mit

$$|\nu(\eta(v)) \cdot (\eta(u) - \eta(v))| \leq D|u - v|^2, \quad u, v \in V. \quad (4.3)$$

Beachte dazu

$$\nu(\eta(v)) = \frac{\partial_1 \eta(v) \times \partial_2 \eta(v)}{|\partial_1 \eta(v) \times \partial_2 \eta(v)|} = \frac{\partial_1 \eta(v) \times \partial_2 \eta(v)}{\sqrt{g(v)}}, \quad v \in V.$$

Aus (4.2) und (4.3) erhalten wir

$$|\nu(y) \cdot (x - y)| = |\nu(\eta(v)) \cdot (\eta(u) - \eta(v))| \leq \frac{D}{c} |x - y|^2$$

Da ∂D kompakt ist, reichen endlich viele V_1, \dots, V_n aus, so dass $\partial D \subseteq \bigcup_{j=1}^n \eta^{(j)}(\overset{\circ}{V}_j)$.

Mit der obigen Überlegung haben wir die Behauptung gezeigt für Paare (x, y) mit $(x, y) \in \eta^{(j)}(\overset{\circ}{V}_j) \times \eta^{(j)}(\overset{\circ}{V}_j)$ für irgendein $j \in \{1, \dots, n\}$. Setze

$$M = (\partial D \times \partial D) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^n \eta^{(j)}(\overset{\circ}{V}_j) \times \eta^{(j)}(\overset{\circ}{V}_j) \right)$$

Dann ist

$$\delta = \inf_{(x,y) \in M} |x - y| > 0.$$

Ist $|x - y| < \delta$, so sind $x, y \in W_j$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$ und die Behauptung folgt aus dem oben gezeigten. Ist $|x - y| \geq \delta$, so gilt

$$|\nu(y) \cdot (x - y)| \leq |x - y| \leq \text{diam} \partial D \leq \frac{\text{diam} \partial D}{\delta^2} |x - y|^2.$$

Für $\nu(x) - \nu(y)$ schätzt man $\nu(\eta(u)) - \nu(\eta(v))$ lokal durch den Mittelwertsatz ab und verwendet (4.2). Der Rest ist analog. ■

Einen Teil des Beweises des nächsten Satzes nehmen wir im folgenden technischen Lemma vorweg.

Lemma 4.7 *Sei ∂D beschränkt und C^2 -glatt. Definiere $D_h = \{x \in \mathbb{R}^N : x = z + \rho\nu(z), z \in \partial D, 0 < |\rho| \leq h\}$. Sei $K : D_h \times \partial D$ stetig und es existiere $c > 0, \alpha \in [0, N - 1]$ mit*

$$K(x, y) \leq \frac{c}{|x - y|^\alpha}, \quad x \in D_h, \quad y \in \partial D.$$

Dann existiert $\tilde{h} \leq h$ mit

$$\sup_{x \in D_{\tilde{h}}} \int_{\partial D \cap B_\delta(x)} |K(x, y)| \, ds(y) \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0).$$

Beweis: Sei $x = z + \rho\nu(z) \in D_h, y \in \partial D$. Dann ist

$$\begin{aligned} |x - y|^2 &= |z - y + \rho\nu(z)|^2 = |z - y|^2 + 2\rho(z - y) \cdot \nu(z) + \rho^2 \\ &\geq |z - y|^2 - 2\rho L |z - y|^2 \geq \frac{1}{4} |z - y|^2 \end{aligned}$$

für $\rho \leq \tilde{h} \leq \frac{3}{8L}$ mit L aus Lemma 4.6. Also gilt $|z - y| \leq 2|x - y|$ für $x \in D_{\tilde{h}}, y \in \partial D$. Somit folgt für $x \in D_{\tilde{h}}$

$$\int_{\partial D \cap B_\rho(x)} |K(x, y)| \, ds(y) \leq C \int_{\partial D \cap B_\rho(x)} \frac{1}{|x - y|^\alpha} \, ds(y) \leq C 2^\alpha \int_{\partial D \cap B_{2\rho}(z)} \frac{1}{|z - y|^\alpha} \, ds(y).$$

Wir betrachten nun dieses Integral für $z \in \partial D$ beliebig und für $N = 3$. Wie in Lemma 4.6 stellen wir ∂D durch n lokale Parametrisierungen $\eta^{(j)} : V_j \rightarrow W_j$ dar. Sei $z = \eta^{(j)}(u), u \in V_j$, für ein $j \leq n$. Nach (4.2) gilt dann für alle $y = \eta^{(j)}(v) \in W_j$ mit $|z - y| < 2\rho$

$$|u - v| \leq \frac{|z - y|}{\sqrt{c}} < \frac{2\rho}{\sqrt{c}}.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
 \int_{W_j \cap B_{2\rho}(z)} \frac{1}{|z-y|^\alpha} ds(y) &\leq \int_{v \in V_j, |u-v| \leq \frac{2\rho}{\sqrt{c}}} \frac{|\partial_1 \eta^{(j)}(v) \times \partial_2 \eta^{(j)}(v)|}{|\eta^{(j)}(u) - \eta^{(j)}(v)|^\alpha} dv \\
 &\leq \frac{\|g^{(j)}\|_\infty}{\sqrt{c}} \int_{|v-u| \leq \frac{2\rho}{\sqrt{c}}} \frac{1}{|u-v|^\alpha} dv \\
 &= \frac{2\pi \|g^{(j)}\|_\infty}{(2-\alpha)\sqrt{c}} \left(\frac{2\delta}{\sqrt{c}}\right)^{2-\alpha} \rightarrow 0 \quad (\delta \rightarrow 0)
 \end{aligned}$$

gleichmäßig in z .

Wie am Ende des Beweises von Lemma 4.6 sieht man, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $(\partial D \setminus W_j) \cap B_{2\delta}(z) = \emptyset$ für $2\delta \leq \varepsilon$. Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Im Folgenden formulieren und beweisen wir die Sprungbeziehungen für SL φ und DL φ . Dazu vorweg die folgende Bemerkung: Aus Kapitel 2 wissen wir, dass

$$\Phi(x, y) = \Phi_0(x, y) + \Psi(x, y)$$

mit

$$\Phi_0(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |x-y|, & N=2 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}, & N=3 \end{cases}$$

und $\Psi(\cdot, \cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Damit sind auch

$$\int_{\partial D} \Psi(\cdot, y) \varphi(y) ds(y), \quad \int_{\partial D} \frac{\partial \Psi(\cdot, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y)$$

beliebig oft stetig differenzierbar auf ganz \mathbb{R}^N . Es reicht also jeweils aus, die Beweise für

$$\text{SL}_0 \varphi(x) = \int_{\partial D} \Phi_0(x, y) \varphi(y) ds(y) \quad \text{bzw.} \quad \text{DL}_0 \varphi(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y)$$

zu führen.

Satz 4.8 (Stetigkeit von SL φ)

Sei D offen, beschränkt und C^2 -glatt, $\varphi \in C(\partial D)$. Dann lässt sich SL φ stetig auf \mathbb{R}^N fortsetzen mit

$$\text{SL} \varphi(x) = \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D.$$

Beweis: Sei R so groß gewählt, dass $\bar{D} \subseteq B_R(0)$. Wir definieren

$$\psi_n(t) = \begin{cases} 1, & |t| \geq \frac{2}{n}, \\ n \left(|t| - \frac{1}{n} \right), & \frac{1}{n} < |t| < \frac{2}{n}, \\ 0, & |t| \leq \frac{1}{n} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}$$

und

$$v_n(x) = \int_{\partial D} \psi_n(|x-y|) \Phi_0(x,y) \varphi(y) \, ds(y), \quad x \in B_R(0)$$

Dann ist v_n stetig auf $B_R(0)$ und

$$\begin{aligned} |v_n(x) - \text{SL}_0 \varphi(x)| &= \left| \int_{\partial D \cap B_{\frac{2}{n}}(x)} (1 - \psi_n(|x-y|)) \Phi_0(x,y) \varphi(y) \, ds(y) \right| \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \int_{\partial D \cap B_{\frac{2}{n}}(x)} |\Phi_0(x,y)| \, ds(y). \end{aligned}$$

Mit Lemma 4.7 folgt, dass das Integral für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig in x gegen 0 konvergiert. Somit gilt

$$\|v_n - \text{SL}_0 \varphi\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

auf $B_R(0)$. Damit ergibt sich, dass $\text{SL}_0 \varphi$ stetig ist. ■

Satz 4.9 (Sprungbeziehung für DL φ)

Sei D offen, beschränkt und C^2 -glatt, $\varphi \in C(\partial D)$. Dann lässt sich DL φ stetig auf \bar{D} und auf $\mathbb{R}^N \setminus D$ fortsetzen, und es gilt im Sinne gleichmäßiger Konvergenz auf ∂D

$$\text{DL} \varphi \Big|_{\pm}(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) \, ds(y) \pm \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial D,$$

wobei

$$\text{DL} \varphi \Big|_{\pm}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \text{DL} \varphi(x \pm h\nu(x)), \quad x \in \partial D.$$

Beweis: Wir zeigen nur den (schwierigen) Fall $N = 3$, vom Prinzip geht der Fall $N = 2$ aber analog. Es ist

$$\frac{\partial \Phi_0(x,y)}{\partial \nu(y)} = \frac{1}{4\pi} \frac{\nu(y) \cdot (x-y)}{|x-y|^3}$$

und somit nach Lemma 4.6

$$\left| \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right| \leq \frac{L}{4\pi|x - y|}, \quad x, y \in \partial D, \quad x \neq y.$$

Das Integral $\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y)$ existiert also für $x \in \partial D$ und ist eine auf ∂D stetige Funktion (siehe z.B. Vorlesung Integralgleichungen). Setze zunächst

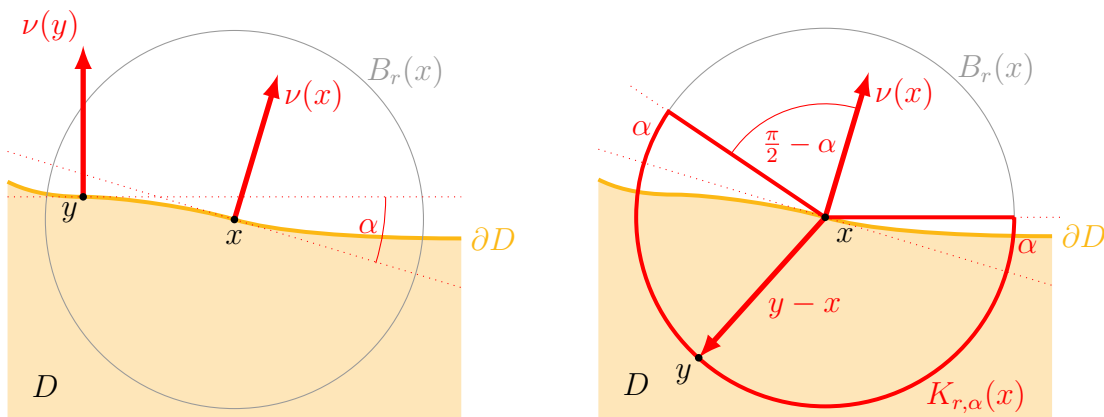
$$w(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D.$$

Wie im Beweis des Green'schen Darstellungssatzes 2.5 zeigt man

$$w(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \\ -1, & x \in D. \end{cases}$$

Für $x \in \partial D$ gilt mit der 1. Green'schen Identität und mit $\Delta_y \Phi_0(x, y) = 0, x \neq y,$

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial D \setminus B_r(x)} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_{D \setminus \bar{B}_r(x)} \Delta_y \Phi_0(x, y) dy - \int_{\partial B_r(x) \cap D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) \right] \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_r(x) \cap D} \frac{1}{r^2} ds(y) \right). \end{aligned}$$



Für hinreichend kleines r existiert nach Lemma 4.6 ein $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$ mit

$$|\nu(y) \cdot \nu(x)| \geq \cos(\alpha) \quad \text{für alle } y \in \partial D \cap B_r(x)$$

und für $r \rightarrow 0$ kann $\alpha \rightarrow 0$ gehen (siehe die linke Abbildung, der Winkel zwischen den Normalen entspricht dem Winkel zwischen den Tangentialebenen). Ferner ist

$$\partial B_r(x) \cap D \subseteq K_{r,\alpha}(x) = \left\{ y : |x - y| = r \quad \text{und} \quad \nu(x) \cdot \frac{y - x}{r} \leq \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right\}$$

(siehe die rechte Abbildung) und damit

$$\int_{\partial B_r(x) \cap D} ds(y) \leq \int_{K_{r,\alpha}} ds(y) = 2\pi r^2 \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta = 2\pi r^2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 1 \right)$$

Mit $r \rightarrow 0$ und $\alpha \rightarrow 0$ ergibt sich

$$\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) = -\frac{1}{2}.$$

Damit ist die Aussage für $\varphi \equiv 1$ bewiesen. Für allgemeines φ und $x = z + \rho \nu(z) \in D_h \setminus \partial D$, $z \in \partial D$ (vgl. Lemma 4.7) beachten wir

$$\text{DL}_0 \varphi(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} (\varphi(y) - \varphi(z)) ds(y) + \varphi(z) \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y).$$

Es bleibt zu zeigen

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} (\varphi(y) - \varphi(z)) ds(y) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(z, y)}{\partial \nu(y)} (\varphi(y) - \varphi(z)) ds(y).$$

Mit dem ersten Teil des Beweises von Lemma 4.7 erhält man die Existenz eines \tilde{h} mit

$$|x - y|^2 = |z - y|^2 + 2\delta(z - y) \cdot \nu(z) + |x - z|^2 \geq \frac{1}{2} (|z - y|^2 + |x - z|^2), \quad \rho \leq \tilde{h}. \quad (4.4)$$

Wir wählen eine lokale Parametrisierung von ∂D um z , $\eta : B_r(0) \rightarrow \partial D$ mit $\eta(0) = z$, und setzen $R = \max_{\xi \in B_r(0)} |\eta(\xi) - z|$. Beachte $\lim_{r \rightarrow 0} R = 0$. Mit Lemma 4.6

erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \int_{\eta(B_r(0))} \left| \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial r(y)} \right| ds(y) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\eta(B_r(0))} \left| \frac{\nu(y) \cdot (z - y)}{|x - y|^3} + \frac{\nu(y) \cdot (x - z)}{|x - y|^3} \right| ds(y) \\
 &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{\eta(B_r(0))} \left(\frac{2^{3/2} L}{|z - y|} + \frac{2^{3/2} |x - z|}{(|z - y|^2 + |x - z|^2)^{3/2}} \right) ds(y) \\
 &\leq C \int_{B_r(0)} \left(\frac{1}{|z - \eta(\xi)|} + \frac{|x - z|}{(|x - z|^2 + |z - \eta(\xi)|^2)^{3/2}} \right) d\xi \\
 &\leq C \left(\int_0^r dt + \int_0^r \frac{|x - z| t}{(|x - z|^2 + t^2)^{3/2}} dt \right) \\
 &= C(r + 1) \quad \text{für } \rho \leq \tilde{h}.
 \end{aligned}$$

Hier wurde Beschränktheit nach unten der Ableitungen von η verwendet,

$$\frac{|0 - \xi|}{|\eta(0) - \eta(\xi)|} = \frac{1}{|\eta'(\tilde{\xi})|} \quad \text{mit } \tilde{\xi} \text{ zwischen } 0 \text{ und } \xi.$$

Die Abschätzung gilt auch für $\int_{\eta(B_r(0))} \left| \frac{\partial \Phi(z, y)}{\partial \nu(y)} \right| ds(y)$ (hier taucht nur der erste Summand auf). Um den nicht-lokalen Teil abzuschätzen, definiere nun

$$h(t) = \frac{\nu(y) \cdot (z + t\nu(z) - y)}{|z + t\nu(z) - y|^3} = 4\pi \frac{\partial \Phi(z + t\nu(z), y)}{\partial \nu(y)}.$$

Dann ist

$$h'(t) = \frac{\nu(y) \cdot \nu(z)}{|z + t\nu(z) - y|^3} - 3 \frac{\nu(y) \cdot (z + t\nu(z) - y) \nu(z) \cdot (z + t\nu(z) - y)}{|z + t\nu(z) - y|^5}$$

und somit

$$|h'(t)| \leq \frac{C}{|z + t\nu(z) - y|^3}.$$

Der Mittelwertsatz liefert

$$\left| \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi_0(z, y)}{\partial \nu(y)} \right| = \frac{1}{4\pi} |h(\rho) - h(0)| \leq \frac{1}{4\pi} |h'(t)| \rho \leq C \frac{|x - z|}{|z + t\nu(z) - y|^3}$$

für ein $t \in (0, \rho)$. Mit (4.4) folgt für $t < \rho \leq \tilde{h}$:

$$|z + t\nu(z) - y| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} |z - y|.$$

Daher ist

$$\left| \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi_0(z, y)}{\partial \nu(y)} \right| \leq C \frac{|x - z|}{|z - y|^3}, \quad |x - z| \leq \tilde{h}. \quad (4.5)$$

Insgesamt erhalten wir nun für hinreichend kleines r

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\partial D} \left(\frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi_0(z, y)}{\partial \nu(y)} \right) (\varphi(y) - \varphi(z)) \, ds(y) \right| \\ & \leq \int_{\eta(B_r(0))} \left[\left| \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} \right| + \left| \frac{\partial \Phi_0(z, y)}{\partial \nu(y)} \right| \right] ds(y) \sup_{y \in \eta(B_r(0))} |\varphi(y) - \varphi(z)| \\ & \quad + 2 \|\varphi\|_\infty \int_{\partial D \setminus \eta(B_r(0))} \left| \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi_0(z, y)}{\partial \nu(y)} \right| ds(y) \\ & \leq C \left(\sup_{y \in \eta(B_r(0))} |\varphi(y) - \varphi(z)| + \frac{|x - z|}{|z - y|^3} \right). \end{aligned}$$

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir zunächst r so klein, dass

$$\sup_{|y-z| < R} |\varphi(y) - \varphi(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2C}.$$

Mit $\rho \leq \frac{\varepsilon R^3}{2C}$ folgt dann

$$\left| \int_{\partial D} \left(\frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi_0(z, y)}{\partial \nu(y)} \right) (\varphi(y) - \varphi(z)) \, ds(y) \right| \leq \varepsilon.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Satz 4.10 (Sprungbeziehung für $\frac{\partial}{\partial \nu} \text{SL } \varphi$)

Sei D offen, beschränkt und C^2 -glatt sowie $\varphi \in C(\partial D)$. Dann existiert der Grenzwert

$$\frac{\partial \text{SL } \varphi}{\partial \nu} \Big|_{\pm} (x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \nu(x) \cdot \nabla \text{SL } \varphi(x \pm h \nu(x))$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz auf ∂D , und es gilt

$$\frac{\partial \text{SL } \varphi}{\partial \nu} \Big|_{\pm} (x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi(y) \, ds(y) \mp \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial D.$$

Beweis: Mit $x = z + \rho\nu(z)$, $z \in \partial D$, $\rho \in \mathbb{R}$, gilt

$$\begin{aligned} & \nu(z) \cdot \nabla \text{SL} \varphi(x) + \text{DL} \varphi(x) \\ &= \nu(z) \cdot \int_{\partial D} \nabla_x \Phi(x, y) \varphi(y) \, ds(y) + \int_{\partial D} \nu(y) \cdot \nabla_y \Phi(x, y) \varphi(y) \, ds(y) \\ &= \int_{\partial D} (\nu(y) - \nu(z)) \cdot \nabla_y \Phi(x, y) \varphi(y) \, ds(y). \end{aligned}$$

Mit Lemma 4.6 und einem Vorgehen wie im Beweis von Satz 4.8 erkennen wir, dass der Ausdruck rechts auf \mathbb{R}^N stetig ist. Es folgt

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0^\pm} (\nu(z) \cdot \nabla \text{SL} \varphi(z + \rho\nu(z))) \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(-\text{DL} \varphi(z + \rho\nu(z)) + \int_{\partial D} (\nu(y) - \nu(z)) \cdot \nabla_y \Phi(z + \rho\nu(z), y) \varphi(y) \, ds(y) \right) \\ &= \mp \frac{1}{2} \varphi(z) - \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(z, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) \, ds(y) + \int_{\partial D} \left(\frac{\partial \Phi(z, y)}{\partial \nu(y)} + \frac{\partial \Phi(z, y)}{\partial \nu(z)} \right) \varphi(y) \, ds(y). \end{aligned}$$

■

Satz 4.11 (Sprungbeziehung für $\frac{\partial}{\partial \nu} \text{DL} \varphi$)

Sei D offen, beschränkt und C^2 -glatt sowie $\varphi \in C(\partial D)$. Dann gilt im Sinne gleichmäßiger Konvergenz auf ∂D :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \nu(x) \cdot \nabla_x \text{DL} \varphi(x + h\nu(x)) - \nu(x) \cdot \nabla_x \text{DL} \varphi(x - h\nu(x)) = 0, \quad x \in \partial D.$$

In Kurzform schreiben wir dies als

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \text{DL} \varphi \Big|_+ (x) - \frac{\partial}{\partial \nu} \text{DL} \varphi \Big|_- (x) = 0, \quad x \in \partial D.$$

Beweis: Sei $z \in \partial D$, $\rho > 0$ und $x_\pm = z \pm \rho\nu(z)$. Im Beweis von Satz 4.9 hatten wir schon gesehen, dass

$$\nabla_x \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\nu(y)}{|x-y|^3} - 3 \frac{\nu(y) \cdot (x-y)}{|x-y|^5} (x-y) \right), \quad .$$

für $x \in \mathbb{R}^N$, $y \in \partial D$ mit $x \neq y$. Somit ist

$$\begin{aligned} & \nu(z) \cdot \nabla_x \text{DL} \varphi(x_\pm) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[\frac{\nu(z) \cdot \nu(y)}{|x_\pm - y|^3} - 3 \frac{\nu(z) \cdot (x_\pm - y) \nu(y) \cdot (x_\pm - y)}{|x_\pm - y|^5} \right] \varphi(y) \, ds(y). \end{aligned}$$

Mit der Abschätzung (4.5) im Beweis von Satz 4.9 erhalten wir, dass

$$\left| \frac{1}{|x_+ - y|^3} - \frac{1}{|x_- - y|^3} \right| \leq C \frac{\rho}{|z - y|^3}, \quad \text{für } \rho \leq \tilde{h}.$$

Eine elementare Rechnung liefert

$$\begin{aligned} & \nu(z) \cdot (x_+ - y) \nu(y) \cdot (x_+ - y) - \nu(z) \cdot (x_- - y) \nu(y) \cdot (x_- - y) \\ &= 2\rho (\nu(z) \cdot \nu(y) \nu(z) \cdot (z - y) + \nu(y) \cdot (z - y)), \end{aligned}$$

woraus sich mit Lemma 4.6 ebenfalls

$$\left| \frac{\nu(z) \cdot (x_+ - y) \nu(y) \cdot (x_+ - y)}{|x_+ - y|^5} - \frac{\nu(z) \cdot (x_- - y) \nu(y) \cdot (x_- - y)}{|x_- - y|^5} \right| \leq C \frac{\rho}{|z - y|^3}$$

ergibt. Für die im ersten Teil von Beweis von Satz 4.9 eingeführte Funktion w gilt offensichtlich

$$\nu(z) \cdot \nabla_x w(x_\pm) = 0, \quad z \in \partial D.$$

Somit ist zu zeigen

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial D} \left[\nu(z) \cdot \nu(y) \left(\frac{1}{|x_+ - y|^3} - \frac{1}{|x_- - y|^3} \right) + \left(\frac{\nu(z) \cdot (x_+ - y) \nu(y) \cdot (x_+ - y)}{|x_+ - y|^5} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\nu(z) \cdot (x_- - y) \nu(y) \cdot (x_- - y)}{|x_- - y|^5} \right) \right] (\varphi(y) - \varphi(z)) \, ds(y) = 0. \end{aligned}$$

Mit den oben gezeigten Abschätzungen gelingt dies wie im zweiten Teil des Beweises von Satz 4.9. \blacksquare

Mit den Sprungbeziehungen können wir die Randwertprobleme als Randintegralgleichungen formulieren. Wir betrachten zunächst den *direkten Zugang* über den Green'schen Darstellungssatz. Wir suchen eine Lösung des äußeren Neumann-Problems. Sofern eine solche Lösung u existiert, gilt nach Satz 2.10:

$$u(x) = \text{DL } u(x) - \text{SL } \frac{\partial u}{\partial \nu}(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \bar{D}.$$

Wir lassen x nach ∂D konvergieren und wenden die Sätze 4.9 und 4.10 an,

$$u(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} u(y) \, ds(y) + \frac{1}{2} u(x) - \int_{\partial D} \Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \, ds(y) \quad x \in \partial D.$$

Der Randwerte $(\partial u)/(\partial \nu)$ sind als Funktion g vorgegeben, so dass wir die Integralgleichung

$$u(x) - 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} u(y) \, ds(y) = -2 \int_{\partial D} \Phi(x, y) g(y) \, ds(y) \quad x \in \partial D,$$

für die unbekanntenen Dirichlet-Daten von u erhalten.

Für ein Dirichlet-Problem führt der direkte Zugang über den Green'schen Darstellungssatz zu einer Integralgleichung der ersten Art. Eine Alternative ist der *indirekte Zugang* über einen Ansatz

$$u(x) = \text{DL } \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{D},$$

mit einer unbekanntenen Dichte $\varphi \in C(\partial D)$. Dieser liefert für $x \rightarrow \partial D$ nach Satz 4.9

$$f(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) \, ds(y), \quad x \in \partial D.$$

Zur Abkürzung definieren wir zunächst die hier auftretenden Integraloperatoren:

Satz und Definition 4.12 *Sei D offen, beschränkt und C^2 -glatt. Dann heißt $S : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$ mit*

$$S\varphi(x) = \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) \, ds(y), \quad x \in \partial D,$$

Einfachschichtoperator, die Operatoren $K, \tilde{K} : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$ mit

$$K\varphi = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) \, ds(y), \quad \tilde{K}\varphi = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi(y) \, ds(y), \quad x \in \partial D,$$

heißen **Doppelschicht-** bzw. **adjungierter Doppelschichtoperator**. Mit

$$N(\partial D) = \left\{ \varphi \in C(\partial D) : \frac{\partial}{\partial \nu} \text{DL } \varphi \Big|_{\pm} \text{ existiert und ist stetig} \right\}$$

heißt $T : N(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$ definiert durch

$$T\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) \, ds(y), \quad x \in \partial D,$$

hypersingulärer Randoperator.

Beweis: Es sind nur die Abbildungseigenschaften zu zeigen. Siehe dazu Colton/Kress, *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, 1983, im Falle von S, K, \tilde{K} auch die Vorlesung über Integralgleichungen. ■

Lemma 4.13 $S, K, \tilde{K} : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$ sind kompakt.

Beweis: Dies folgt aus den Eigenschaften von linearen Integraloperatoren mit schwach singulärem Kern (siehe Vorlesung zu Integralgleichungen). ■

Aufgrund dieses Lemmas können wir für den Nachweis der Existenz von Lösungen der Randintegralgleichungen die Riesz-Theorie verwenden. Zeigt man, dass der Integraloperator injektiv ist, so ist er auch surjektiv. Wir führen dies mit den oben gefundenen Ansätzen für Lösungen des äußeren Dirichlet- bzw. Neumann-Problems durch.

Satz 4.14 Sei D offen, beschränkt und C^2 -glatt. Ferner sei k^2 kein Neumann-Eigenwert von $-\Delta$ in D (d.h. das innere Neumann Problem besitze für jedes $g \in C(\partial D)$ höchstens eine Lösung). Dann existiert genau eine Lösung des äußeren Dirichlet'schen Randwertproblems. Diese ist gegeben durch

$$u = \text{DL} \varphi \quad \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \overline{D},$$

wobei $\varphi \in C(\partial D)$ die eindeutig bestimmte Lösung der Randintegralgleichung

$$\varphi + 2K\varphi = 2f$$

auf ∂D ist.

Beweis: Aufgrund von Satz 4.2 ist nur zu zeigen, dass eine Lösung des äußeren Dirichlet'schen Problems existiert. Nach unseren Vorüberlegungen ist dazu die Existenz einer Lösung φ der Randintegralgleichung aus dem Satz nachzuweisen. Mit der Riesz-Theorie ist dies gleichbedeutend dazu, dass der Operator $I + 2K$ injektiv ist.

Sei also $\varphi \in C(\partial D)$ eine Lösung von

$$\varphi + 2K\varphi = 0.$$

Dann ist $\text{DL} \varphi$ Lösung des äußeren Dirichlet Problems mit Randwerten $\text{DL} \varphi|_+ = 0$ auf ∂D . Also ist nach Satz 4.2 $\text{DL} \varphi \equiv 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus \partial D$. Damit ist auch $\frac{\partial}{\partial \nu} \text{DL} \varphi|_+ = 0$ auf ∂D und mit Satz 4.11 ergibt sich, dass $\text{DL} \varphi$ Lösung des inneren Neumann'schen Problems in D mit Randwerten $g = 0$ ist (Anmerkung: Wir haben, dass $\frac{\partial}{\partial \nu} \text{DL} \varphi|_-$ auf ∂D existiert gleich null ist, benötigen aber streng genommen $\text{DL} \varphi \in C^1(\overline{D})$, was nicht gezeigt wurde. Dies folgt aber aus der Integralgleichung für φ und Regularitätseigenschaften für Potentiale, siehe etwa Colton/Kress 1983,

Theorem 2.23 und Theorem 2.30). Nach der Voraussetzung des Satzes ist $DL\varphi = 0$ in D . Mit Satz 4.9 ergibt sich

$$\varphi = DL\varphi|_+ - DL\varphi|_- = 0 - 0 = 0$$

auf ∂D . ■

Satz 4.15 Sei D offen, beschränkt und C^2 -glatt. Ferner sei k^2 kein Dirichlet-Eigenwert von $-\Delta$ in D (d.h. das innere Dirichlet Problem besitze für jedes $g \in C(\partial D)$ höchstens eine Lösung). Dann existiert genau eine Lösung des äußeren Neumann'schen Randwertproblems. Diese ist gegeben durch

$$u = DL\varphi - SLg \quad \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \overline{D},$$

wobei $\varphi \in C(\partial D)$ die eindeutig bestimmte Lösung der Randintegralgleichung

$$\varphi - 2K\varphi = -2S\varphi$$

auf ∂D ist. Es gilt $u|_{\partial D} = \varphi$.

Beweis: Sei $\varphi \in C(\partial D)$ eine Lösung von

$$\varphi - 2K\varphi = 0 \quad \text{auf } \partial D.$$

Setze $u = DL\varphi$. Dann ist

$$u|_- = -\frac{1}{2}\varphi + K\varphi = 0 \quad \text{auf } \partial D,$$

und somit nach der Voraussetzung $u \equiv 0$ in D . Damit ist $\frac{\partial}{\partial \nu} DL\varphi|_- = 0$ auf ∂D und nach Satz 4.11 folgt auch $\frac{\partial}{\partial \nu} DL\varphi|_+ = 0$ auf ∂D . Somit ist u Lösung des äußeren Neumann-Problems (siehe wieder die Anmerkung im Beweis von Satz 4.14) mit $g = 0$ und es folgt $u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus \overline{D}$. Damit ist

$$\varphi = u|_+ - u|_- = 0 \quad \text{auf } \partial D. \quad \blacksquare$$

Kommentar: Bei diesen Zugängen kann man auf die zusätzlichen Voraussetzungen über die inneren Probleme nicht verzichten: Obwohl die äußeren Probleme tatsächlich für alle k eindeutig lösbar sind, hat man nicht für alle k die eindeutige Lösbarkeit der Randintegralgleichung. Numerisch ist dies auch sichtbar: In der

Nähe des entsprechenden Eigenwerts k^2 von $-\Delta$ in D wird die Integralgleichung instabil.

Einen Ausweg bieten modifizierte Ansätze für die Integralgleichungen. Wir führen dies hier nur für den Fall des Dirichlet-Problems ausführlich vor. Von Brakhage und Werner stammt der Ansatz

$$u = \text{DL } \varphi - i\eta \text{ SL } \varphi \quad \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \overline{D}$$

mit einem Parameter $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ein solches u ist genau dann Lösung des äußeren Dirichlet Problems wenn

$$\frac{1}{2} \varphi + K\varphi - i\eta S\varphi = f \quad \text{auf } \partial D$$

gilt.

Satz 4.16 *Sei D offen, beschränkt und C^2 -glatt. Dann besitzt das äußere Dirichlet Problem genau eine Lösung. Diese ist für jedes $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben durch*

$$u = \text{DL } \varphi - i\eta \text{ SL } \varphi \quad \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \overline{D},$$

wobei $\varphi \in C(\partial D)$ die eindeutig bestimmte Lösung der Randintegralgleichung

$$\varphi + 2K\varphi - 2i\eta S\varphi = 2f \quad \text{auf } \partial D$$

ist.

Beweis: Es sei $\varphi \in C(\partial D)$ Lösung von

$$\varphi + 2K\varphi - 2i\eta S\varphi = 0 \quad \text{auf } \partial D.$$

Setze

$$u = \text{DL } \varphi - i\eta \text{ SL } \varphi \quad \text{in } \mathbb{R}^N \setminus \partial D.$$

Dann ist $u|_+ = 0$ auf ∂D und somit nach Satz 4.2 $u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus \overline{D}$. Mit Eigenschaften der Potentiale erhalten wir $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ (siehe Colton/Kress 1983, Theorems 2.17, 2.23, 2.30 und 2.31) und mit den Sätzen 4.8–4.11 ergibt sich

$$\begin{aligned} u|_- &= -\frac{1}{2} \varphi + K\varphi - i\eta S\varphi = -\varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_- &= \frac{\partial}{\partial \nu} \text{DL } \varphi \Big|_- - i\eta \frac{\partial}{\partial \nu} \text{SL } \varphi \Big|_- \\ &= \frac{\partial}{\partial \nu} \text{DL } \varphi \Big|_+ - i\eta \frac{\partial}{\partial \nu} \text{SL } \varphi \Big|_+ - i\eta \varphi \\ &= \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_+ - i\eta \varphi = -i\eta \varphi. \end{aligned}$$

Mit der ersten Green'schen Identität folgt

$$\int_D (|\nabla u|^2 - k^2 |u|^2) dx = \int_{\partial D} \bar{u}|_ - \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_ - ds = i\eta \int_{\partial D} |\varphi|^2 ds.$$

Der Imaginärteil dieser Gleichung ist

$$\eta \int_{\partial D} |\varphi|^2 ds = 0.$$

Da $\eta \neq 0$ vorausgesetzt war, folgt $\varphi \equiv 0$. ■

Bemerkung 4.17 Derselbe Ansatz führt für das äußere Neumann Problem auf die Integralgleichung

$$2T\varphi - i\eta \tilde{K}\varphi + i\eta \varphi = 2g.$$

Zunächst muss man für φ mehr Regularität verlangen, damit dies wohldefiniert ist. Da der Operator T nicht kompakt ist, kann die Riesz-Theorie nicht direkt angewandt werden, sondern es ist eine Regularisierung notwendig. Für eine Analyse für $N = 2$ siehe Kreß, On the numerical solution of a hypersingular integral equation in scattering theory, *J. Comp. Appl. Math.* **61** (1995), 345–360. Eine Alternative ist der Ansatz von Panich

$$u = \text{SL} \varphi + i\eta \text{DL}(S_0^2 \varphi),$$

wobei S_0 der Einfachschichtoperator für den Laplace-Operator (mit der Fundamentallösung $\Phi_0(\cdot, \cdot)$) ist. Man kann zeigen, dass TS_0^2 kompakt ist, sodass hier die Riesz-Theorie angewandt werden kann. ◀

Alternativ zur Integralgleichungsmethode können sogenannte Variationsformulierungen der Randwertprobleme verwendet werden, um die Existenz von Lösungen zu beweisen. Hierbei werden schwächere Regularitätsvoraussetzungen an die Lösungen gestellt als klassische Differenzierbarkeit, und es sind auch kompliziertere Mengen D , etwa mit Ecken und Kanten, möglich. Eine Einführung in das Thema gibt zum Beispiel Evans, *Partial Differential Equations*, 1998, Kapitel 5 und 6. Detaillierte Ausführungen bietet etwa Beispiel McLean, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, 2000.

Kapitel 5

Inverse Streuprobleme

Klassische inverse Streuprobleme beinhalten die Rekonstruktion eines Streuobjekts aus dem Fernfeld eines oder mehrerer gestreuter Felder. Viele Variationen sind denkbar: Rekonstruktion eines inhomogenen Mediums, Rekonstruktion eines Parameters in der Randbedingung, Verwendung von Nah- statt Fernfeldern, eingeschränkte Beobachtungsrichtungen, usw. In der Theorie inverser Streuprobleme geht es vornehmlich um zwei Fragestellungen:

- Ist das Streuobjekt durch die Daten eindeutig bestimmt?
- Wie kann man das Streuobjekt numerisch bestimmen?

Wir stellen hier nur die Ergebnisse für $N = 3$ vor, vergleichbare Resultate gelten aber für $N = 2$. Auf die erste Frage kann für verschiedene Situationen eine positive Antwort gegeben werden:

Satz 5.1 *Gegeben seien zwei Dirichlet-Streuprobleme für dieselbe Wellenzahl mit Streuobjekten D_1, D_2 , sodass die Fernfelder der gestreuten Felder für unendlich viel verschiedene ebene Wellen als einfallende Felder übereinstimmen. Dann ist $D_1 = D_2$.*

Beweis: Wir nehmen $D_1 \neq D_2$ an. Sei G die unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^N \setminus (D_1 \cup D_2)$. Die gestreuten Felder stimmen nach den Sätzen 3.15 und 3.16 auf G überein. Wir bezeichnen es mit u^s , das einfallende Feld mit u^i . Es gilt $u^t = u^i + u^s = 0$ auf ∂G für das totale Feld. Ohne Einschränkung sei $\tilde{D} = (\mathbb{R}^N \setminus G) \setminus \overline{D_2}$ nicht leer. Dann lässt sich u^s analytisch auf \tilde{D} fortsetzen (bzw. es ist die Lösung des Streuproblems für D_2) und es gilt $u^t = 0$ auf $\partial \tilde{D}$. Also

ist u^t eine Dirichlet-Eigenfunktion zum Eigenwert k^2 von $-\Delta$. Wir in Beweis von Lemma 4.3 zeigt man ferner $\nabla u^t \in L^2(\tilde{D})$.

Wir bezeichnen nur mit d_1, d_2, \dots eine Folge von Einfallrichtungen, für die die Fernfelder übereinstimmen. und mit u_1^t, u_2^t, \dots bzw. u_1^s, u_2^s, \dots die entsprechenden totalen bzw. gestreuten Felder. Wir zeigen zunächst: Die u_n^t sind linear unabhängig. Sei dazu

$$\sum_{n=1}^M c_n u_n^t = 0 \quad \text{in } \tilde{D}.$$

Da die u_n^t analytisch sind, gilt dies auch in $\mathbb{R}^N \setminus B_R(0)$ mit $D_1 \cup D_2 \subseteq B_{\mathbb{R}}(0)$. Mit

$$u_n^t(x) = \exp(ikx \cdot d_n) + u_n^s(x)$$

und da u_n^s die SAB erfüllt (also $u_n^s(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$) folgt für $m = 1, \dots, M$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^M c_n \int_{|x|=R} \exp(ikx \cdot (d_n - d_m)) \, ds(x) \\ &= \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^m c_n \sum_{n=1}^m \int_{|x|=R} u_n^s(x) \overline{u_m^s(x)} \, ds(\hat{x}) \\ &= \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^u c_n \int_{|x|=R} \frac{1}{R^2} \left(u_n^\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{R}\right) \right) \left(\overline{u_m^\infty(\hat{x})} + O\left(\frac{1}{R}\right) \right) \, ds(\hat{x}) \\ &= O\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad R \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Aus dem Additionstheorem für die Fundamentallösung lesen wir für $|x| > r$ ab:

$$\int_{S^2} \Phi(x, r\hat{z}) Y_n^m(\hat{z}) \, ds(\hat{z}) = ik j_n(kr) h_n(k|x|) Y_n^m(\hat{x}), \quad n \in \mathbb{N}_0, m = -n, \dots, n$$

Mit $|x| \rightarrow \infty$ ergibt sich für die Fernfelder

$$\int_{S^2} e^{-ikr \hat{x} \cdot \hat{z}} Y_n^m(\hat{z}) \, ds(\hat{z}) = \frac{4\pi}{i^n} j_n(kr) Y_n^m(\hat{x}).$$

Mit $y = r\hat{x}$ erhalten wir die *Funk-Hecke-Formel*

$$\int_{S^2} e^{-iky \cdot \hat{z}} Y_n^m(\hat{z}) \, ds(\hat{z}) = \frac{4\pi}{i^n} j_n(k|y|) Y_n^m(\hat{y}), \quad y \in \mathbb{R}^3.$$

Damit ist für $n \neq m$:

$$\begin{aligned} & \int_{|x|=R} \exp(ikx \cdot (d_n - d_m)) \, ds(x) \\ &= R^2 \int_{S^2} \exp(-ikR\hat{x} \cdot (d_m - d_n)) \, ds(\hat{x}) \\ &= 4\pi R^2 j_0(kR|d_m - d_n|) = \frac{4\pi R \sin(kR|d_m - d_n|)}{k|d_m - d_n|} \end{aligned}$$

Es folgt für $m = 1, \dots, M$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R^2} \sum_{n=1}^M c_n \int_{|x|=R} \exp(ikx \cdot (d_n - d_m)) \, ds(x) \\ &= 4\pi c_m + \frac{1}{R} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^M c_n \frac{4\pi \sin(kR|d_m - d_n|)}{k|d_m - d_n|} \longrightarrow 4\pi c_m \quad (R \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Somit ist $c_m = 0$, $m = 1, \dots, M$, und die u_m^t sind linear abhängig.

Wir erzeugen nun aus $\{u_m^t : m \in \mathbb{N}\}$ nach dem Gram-Schmidt'schen Verfahren eine Orthogonalfolge (v_m) mit

$$\int_{\tilde{D}} v_n \overline{v_m} \, dx = \delta_{nm}.$$

Dann ist (Lemma 4.3)

$$\int_{\tilde{D}} |\nabla v_m|^2 \, dx = k^2 \int_{\tilde{D}} |v_m|^2 \, dx = k^2,$$

d.h. die Folge (v_m) ist enthalten und beschränkt in

$$\{u \in L^2(\tilde{D}) : \nabla u \in L^2(\tilde{D}), u|_{\partial\tilde{D}} = 0\} = H_0^1(\tilde{D}).$$

Nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz (siehe z.B. McLean, Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations, Theorem 3.27) ist $H_0^1(\tilde{D})$ kompakt eingebettet in $L^2(\tilde{D})$. Somit enthält (v_m) eine in $L^2(\tilde{D})$ konvergente Teilfolge. Dies ist ein Widerspruch, da (v_m) eine Orthonormalfolge in $L^2(\tilde{D})$ ist. Es können also nur endlich viele der u_n^t linear unabhängig sein, in Widerspruch zur Voraussetzung, dass unendlich viele u_n^t gegeben sind. ■

Es ist noch immer eine ungelöste Frage, ob die Eindeutigkeit allgemein auch bei Übereinstimmung der Fernfelder für endlich viele einfallende Felder gilt. Numerisch ergeben sich mit iterativem Regularisierungsverfahren zuverlässig korrekte Rekonstruktionen selbst für nur eine einfallende Welle. Entsprechende Eindeutigkeitssätze wurden bisher aber nur unter Zusatzvoraussetzungen bewiesen.

Satz 5.2 (Colton/Sleeman)

Es bezeichne $t_{n,l}$ die l -te positive Nullstelle der sphärischen Besselfunktion j_n , $n, l = 0, 1, 2, \dots$, $t_{n,0} < t_{n,1} < t_{n,2} < \dots$. Für D_1, D_2 gelte $D_j \subseteq B_R(z)$. Setze

$$M = \sum_{t_{n,l} < kR} (2n + 1).$$

Stimmen die Fernfelder für $M + 1$ einfallende ebene Wellen mit paarweise verschiedenen Einfallrichtungen und einer Wellenzahl k überein, so gilt $D_1 = D_2$.

Beweis: Nehme $D_1 \neq D_2$ an und definiere \tilde{D} wie im Beweis von Satz 5.1.

Dann gibt es $M + 1$ linear unabhängige Eigenfunktionen zu $-\Delta$ mit Eigenwert k^2 und Dirichlet'schen Randbedingungen in \tilde{D} . Mit $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m = k^2$ bezeichnen wir die Eigenwerte von $-\Delta$ mit Dirichlet-Randbedingungen in \tilde{D} , für die $\lambda_j \leq k^2$, $j = 1, \dots, m$, gilt. Bezeichne ferner mit μ_1, μ_2, \dots die Eigenwerte von $-\Delta$ mit Dirichlet-Randbedingungen in $B_R(z)$.

Nach einem Monotonie-Prinzip für Eigenwerte von $-\Delta$ (Leis, Initial Boundary Value Problems in Mathematical Physics, 1986, Theorem 4.7) gilt dann wegen $\tilde{D} \subseteq B_R(z)$: $\mu_m < \lambda_m = k^2$. Insbesondere

$$\#\{\lambda_j : \lambda_j = \lambda_m\} \leq \{j : \mu_j < k^2\}.$$

Die μ_j können aber explizit bestimmt werden, die Eigenfunktionen in $B_R(z)$ sind

$$j_n \left(\frac{t_{n,l}}{R} |x| \right) Y_n^m(\hat{x}) \quad \text{mit zugehörigem Eigenwert} \quad \mu = \frac{t_{n,l}^2}{R^2}.$$

Die Multiplizität des Eigenwerts ist $2n + 1$. Somit gibt es höchstens M linear unabhängige Eigenfunktionen von $-\Delta$ mit Dirichlet'schen Randbedingungen in $B_R(z)$ mit Eigenwert $< k^2$. Also ist auch $\#\{j : \lambda_j = \lambda_m\} \leq M$ im Widerspruch zur Annahme. ■

Korollar 5.3 Sind $D_1, D_2 \subseteq B_R(z)$ mit $kR < \pi$ und stimmen die Fernfelder für eine einzige ebene Welle mit Wellenzahl k überein, so gilt $D_1 = D_2$.

Beweis: Es gilt (Abramowitz & Stegun, Formel 10.1.23)

$$t^{n+1} j_{n-1}(t) = \frac{d}{dt}(t^{n+1} j_n(t)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ferner ist $j_n(0) = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Nach dem Satz von Rolle befindet sich zwischen 0 und $t_{n,0} > 0$, welches beides Nullstellen von j_n sind, eine Nullstelle \tilde{t} der Ableitung von $t^{n+1} j_n(t)$. Dann gilt $\tilde{t} > 0$ und nach obiger Formel ist \tilde{t} Nullstelle von j_{n-1} . Es folgt

$$0 < t_{n-1,0} \leq \tilde{t} < t_{n,0}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Somit ist $(t_{n,0})$ streng monoton wachsend mit

$$\min\{t_{nl} : n, l = 0, 1, 2, \dots\} = t_{00}.$$

Da $j_0(t) = \frac{\sin(t)}{t}$, folgt $t_{00} = \pi$. Mit $kR < \pi$ ist also M aus Satz 5.2 gleich null. ■

Kommentar:

- Die Aussage des Satzes 5.2 ist von Gintides (Inverse Problems 2005) noch verbessert worden. Andere Aussagen betreffen den Fall, dass etwas über die geometrische Natur des Objekts bekannt ist. Zum Beispiel kann ein polygonal berandetes Gebiet aus dem Fernfeld für eine ebene Welle eindeutig rekonstruiert werden (Elschner/Yamamoto und Liu/Zou, Inverse Problems, 2006).
- Der Beweis des Satzes von Schiffer (Satz 5.2) verwendet die kompakte Einbettung von $H_0^1(\tilde{D})$ in $L^2(\tilde{D})$. Für andere Randbedingungen braucht man die Existenz geeigneter Randwerte auf $\partial\tilde{D}$, die aber nur für hinreichend glattes \tilde{D} (Lipschitz-Gebiet) gegeben ist. Eindeutigkeitsaussagen für solche Mengen findet man z.B. in Kirsch/Kress, Inverse Problems, 1993.

Im folgenden wird es um Methoden zur praktischen Lösung inverser Streuprobleme gehen. Um allgemeine Verfahren für Inverse Probleme anwenden zu können, muss das inverse Streuproblem zunächst in geeigneten normierten Räumen formuliert werden. Dazu schränken wir die Klasse der möglichen Streuer ein. Allgemeine Klassen sind möglich, sprengen aber den hier vorhandenen Raum (siehe aber: Potthast, Inverse Problems, 1994 und die Dissertation von Potthast, Göttingen, 1994).

Definition 5.4 *Ein C^2 -glatte, beschränkte, offene Menge $D \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt **sternförmig**, falls es eine positive Funktion $r \in C^2(S^2)$ gibt mit*

$$\partial D = \{x = r(\hat{x})\hat{x}, \quad \hat{x} \in S^2\}.$$

Definition 5.5 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ sternförmig. Das direkte Streuprobleme mit Dirichlet'scher Randbedingung und einem festen einfallenden Feld u^i definiert einen Operator $F : C^2(S^2) \mapsto L^2(S^2)$. Das inverse Problem besteht nun aus der Invertierung der Operatorgleichung

$$F(r) = u^\infty.$$

Indem wir den Definitionsbereich von F weiter auf einen Hilbert-Raum einschränken, dessen Elemente 2-mal stetig differenzierbare Funktionen auf S^2 sind (dies erfüllt beispielsweise $H^s(S^2)$ für $s \geq 4$, könnte z.B. die Landweber-Iteration durchgeführt werden. Wir wollen stattdessen ein Newton-Verfahren anwenden. Dafür benötigen wir die Fréchet-Differenzierbarkeit von F . Diese kann über Variationsformulierungen für Streuprobleme (Hettlich, Hohage) oder über die Fréchet-Differenzierbarkeit der Randoperatoren (Potthast) nachgewiesen werden. Letzteren Weg werden wir hier beschreiben.

Zunächst formulieren wir die Randoperatoren um, so dass die Abhängigkeit vom Gebiet explizit wird. Dazu betrachten wir zunächst die Integration über Ränder sternförmiger Gebiete:

Lemma 5.6 Es sei D sternförmig mit radialer Funktion $r \in C^2(S^2)$. Dann gilt für $f \in C(\partial D)$:

$$\int_{\partial D} f(x) \, ds(x) = \int_{S^2} f(r(\hat{x})\hat{x}) J[r](\hat{x}) \, ds(\hat{x})$$

mit

$$J[r](\hat{x}) = r(\hat{x}) \sqrt{r^2(\hat{x}) + |\text{Grad } r(\hat{x})|^2}, \quad \hat{x} \in S^2.$$

Hierbei heißt $\text{Grad } r$ der **Oberflächengradient** von r , mit Kugelkoordinaten gilt

$$\text{Grad } r = \partial_\vartheta r \, \partial_\vartheta \hat{x} + \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\varphi r \, \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\varphi \hat{x}.$$

Der äußere Einheitsnormalenvektor an ∂D ist gegeben durch

$$\nu[r](\hat{x}) = \frac{r(\hat{x})\hat{x} - \text{Grad } r(\hat{x})}{\sqrt{r^2(\hat{x}) + |\text{Grad } r(\hat{x})|^2}}, \quad x \in S^2.$$

Kommentar: Mit $\hat{x} = (\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)^\top$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $\vartheta \in [0, \pi]$, bilden die Vektoren

$$\hat{x}, \quad \partial_\vartheta \hat{x}, \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\varphi \hat{x}$$

stets ein rechthändiges ONS. Ist u eine skalarwertige Funktion, so ist der Gradient in Kugelkoordinaten gerade

$$\nabla u = \partial_r u \, \hat{x} + \frac{1}{r} \partial_\vartheta u \, \partial_\vartheta \hat{x} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi u \, \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\varphi \hat{x}.$$

Grad ist also gerade der Tangentialanteil des Gradienten auf S^2 . Für eine allgemeine Oberfläche ∂D definiert man

$$\text{Grad } u = \nabla u - \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot \nu.$$

Beweis: Wir parametrisieren das Integral über ∂D durch $x = r(\hat{x}) \hat{x}$ auf dem Rechteck $(-\pi, \pi) \times (0, \pi)$:

$$\int_{\partial D} f(x) \, ds(x) = \int_{(-\pi, \pi) \times (0, \pi)} f(r(\hat{x}) \hat{x}) |\partial_\varphi(r(\hat{x}) \hat{x}) \times \partial_\vartheta(r(\hat{x}) \hat{x})| \, d(\varphi, \vartheta).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_\varphi(r(\hat{x}) \hat{x}) \times \partial_\vartheta(r(\hat{x}) \hat{x}) &= (\partial_\varphi r(\hat{x}) \hat{x} + r(\hat{x}) \partial_\varphi \hat{x}) \times (\partial_\vartheta r(\hat{x}) \hat{x} + r(\hat{x}) \partial_\vartheta \hat{x}) \\ &= r(\hat{x}) \partial_\varphi r(\hat{x}) \hat{x} \times \partial_\vartheta \hat{x} + r(\hat{x}) \partial_\vartheta r(\hat{x}) \partial_\varphi \hat{x} \times \hat{x} \\ &\quad + r^2(\hat{x}) \partial_\varphi \hat{x} \times \partial_\vartheta(\hat{x}) \\ &= r(\hat{x}) \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\varphi r(\hat{x}) \partial_\varphi \hat{x} + \sin \vartheta \partial_\vartheta r(\hat{x}) \partial_\vartheta \hat{x} - \sin \vartheta r(\hat{x}) \hat{x} \right) \\ &= r(\hat{x}) \sin \vartheta (\text{Grad } r(\hat{x}) - r(\hat{x}) \hat{x}) \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich bereits die Formel für $\nu[r]$, wenn man noch die Orientierung nach außen berücksichtigt. Ferner ist somit

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} f(x) \, ds(x) &= \int_{(-\pi, \pi) \times (-0, \pi)} f(r(\hat{x}) \hat{x}) J[r](\hat{x}) \sin \vartheta \, d(\varphi, \vartheta) \\ &= \int_{\mathbb{S}^2} f(r(\hat{x}) \hat{x}) J[r](\hat{x}) \, ds(\hat{x}). \end{aligned}$$

■

Mit Lemma 5.6 können wir Operatoren auf $C(\mathbb{S}^2)$ angeben, die den Randoperatoren auf $C(\partial D)$ entsprechen und die Abhängigkeit von r explizit enthalten. Wir setzen dazu noch

$$x[r] = r(\hat{x}) \hat{x}, \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2,$$

und definieren für $\varphi \in C(\mathbb{S}^2)$:

$$\begin{aligned} S[r]\varphi(\hat{x}) &= \int_{\mathbb{S}^2} \Phi(x[r], y[r]) J[r](\hat{y}) \varphi(\hat{y}) \, ds(\hat{y}), \\ K[r]\varphi(\hat{x}) &= \int_{\mathbb{S}^2} \nu[r](\hat{y}) \cdot \nabla_y \Phi(x[r], y[r]) J[r](\hat{y}) \varphi(\hat{y}) \, ds(\hat{y}), \end{aligned}$$

$$\tilde{K}[r]\varphi(\hat{x}) = \int_{\mathbb{S}^2} \nu[r](\hat{x}) \cdot \nabla_x \Phi(x[r], y[r]) J[r](\hat{y}) \varphi(\hat{y}) \, ds(\hat{y}),$$

jeweils mit $\hat{x} \in \mathbb{S}^2$. Nach Lemma 5.6 gilt nun für $\varphi \in C(\partial D)$:

$$S\varphi(x[r]) = S[r](\varphi \circ x[r]^{-1})(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2,$$

und analog für K, \tilde{K} .

Satz 5.7 Die Abbildung $r \mapsto S[r]$ von $C^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow \mathcal{L}(C(\mathbb{S}^2))$ ist Fréchet-differenzierbar.

Beweis: (i) Es gilt

$$\frac{1}{2} \min_{\hat{z} \in \mathbb{S}^2} |r(\hat{z})| |\hat{x} - \hat{y}| \leq |x[r] - y[r]| \leq \pi \|r\|_{C^1(\mathbb{S}^2)} |\hat{x} - \hat{y}|$$

für alle $r \in C^1(S^2)$ und alle $\hat{x}, \hat{y} \in S^2$. Aus $\hat{x} \cdot \hat{y} \leq 1$ ergibt sich nämlich

$$r(\hat{x})^2 - 2r(\hat{x})r(\hat{y}) + r(\hat{y})^2 \leq r(\hat{x})^2 - 2r(\hat{x})r(\hat{y})\hat{x} \cdot \hat{y} + r(\hat{y})^2,$$

also $|r(\hat{x}) - r(\hat{y})|^2 \leq |x[r] - y[r]|^2$. Somit ist

$$|r(\hat{x})(\hat{x} - \hat{y})| \leq |x[r] - y[r]| + |(r(\hat{y}) - r(\hat{x}))\hat{y}| \leq 2|x[r] - y[r]|$$

Ferner gilt, mit dem Mittelwertsatz und einer Stelle $\hat{z} \in \mathbb{S}^2$ auf dem \hat{x} und \hat{y} verbindenden Großkreisbogen,

$$\begin{aligned} |x[r] - y[r]| &\leq |r(\hat{x}) - r(\hat{y})| + |r(\hat{y})(\hat{x} - \hat{y})| \\ &\leq \pi |\text{Grad } r(\hat{z})| |\hat{x} - \hat{y}| + |r(\hat{y})| |\hat{x} - \hat{y}|. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die gewünschte Abschätzung nach oben.

(ii) Herleitung eines Ausdrucks für die Fréchet-Ableitung.

Wir schreiben

$$S[r]\varphi(\hat{x}) = \int_{\mathbb{S}^2} s[r](\hat{x}, \hat{y}) \varphi(\hat{y}) \, ds(\hat{y})$$

mit $s[r](\hat{x}, \hat{y}) = \Psi(x[r] - y[r]) J[r](\hat{y})$ und

$$\Psi(z) = \frac{e^{ik|z|}}{4\pi|z|}, \quad z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Die Ableitung von s bezüglich r ist

$$s'[r]q(\hat{x}, \hat{y}) = \nabla \Psi(x[r] - y[r]) \cdot (x[q] - y[q]) J[r](\hat{y}) + \Psi(x[r] - y[r]) J'[r]q(\hat{y})$$

mit

$$J'[r]q = q \sqrt{r^2 + |\text{Grad } r|^2} - r \frac{rq + \text{Grad } r \cdot \text{Grad } q}{\sqrt{r^2 + |\text{Grad } r|^2}}.$$

Aus der in Teil (i) gezeigten Abschätzung folgt, dass $s'[q]$ schwach singulär ist. Somit ist durch

$$(S'[r]q)\varphi(\hat{x}) = \int_{\mathbb{S}^2} s'[r]q(\hat{x}, \hat{y}) \varphi(\hat{y}) \, ds(\hat{y})$$

ein beschränkter Operator $S'[r]q : C(\mathbb{S}^2) \rightarrow C(\mathbb{S}^2)$ gegeben. Ferner ist

$$|s'[r]q(\hat{x}, \hat{y})| \leq \frac{C(r)}{|\hat{x} - \hat{y}|} \|q\|_{C^1(\mathbb{S}^2)}$$

und damit $\|S'[r]q\|_{\mathcal{L}(C(\mathbb{S}^2))} \leq C(r) \|q\|_{C^1(\mathbb{S}^2)}$. Somit ist $q \mapsto S'[r]q$ beschränkt von $C^2(\mathbb{S}^2)$ nach $\mathcal{L}(C(\mathbb{S}^2))$.

(iii) Nachweis, dass es sich tatsächlich um die Fréchet-Ableitung handelt.

Setze für $z, w \in \mathbb{R}^3$, $z + tw \neq 0$, $t \in [0, 1]$

$$h(t) = \Psi(z + tw), \quad t \in [0, 1].$$

Dann ist

$$h'(t) = w \cdot \nabla \Psi(z + tw), \quad h''(t) = w \cdot \Psi''(z + tw) w$$

Eine elementare Rechnung liefert für jeden Koeffizienten $a(z)$ der Matrix $\Psi''(z)$ die Abschätzung

$$|a(z)| \leq C \left(\frac{1}{|z|} + \frac{1}{|z|^2} + \frac{1}{|z|^3} \right), \quad z \in \mathbb{R}^3.$$

Ist also $|z + tw|$ beschränkt, etwa $|z + tw| \leq 4\|r\|_\infty$, so gilt

$$|h''(t)| \leq C \frac{|w|^2}{|z + tw|^3}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} h(1) - h(0) - h'(0) &= \int_0^1 h'(t) \, dt - h'(0) = \int_0^1 \int_0^t h''(s) \, ds \, dt \\ &= \int_0^1 \int_s^1 h''(s) \, dt \, ds = \int_0^1 (1-s) h''(s) \, ds. \end{aligned}$$

Es folgt mit $z = x[r] - y[r]$, $w = x[q] - y[q]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} & |\Psi(x[r+q] - y[r+q]) - \Psi(x[r] - y[r]) - \nabla\Psi(x[r] - y[r]) \cdot (x[q] - y[q])| \\ & \leq C \min_{t \in [0,1]} \frac{|x[q] - y[q]|^2}{|x[r+ tq] - y[r+ tq]|^3} \\ & \stackrel{(i)}{\leq} C \frac{\|q\|_{C^1(\mathbb{S}^2)}^2}{|\hat{x} - \hat{y}|} \end{aligned}$$

für hinreichend kleines q . Zusammen mit der Formel für $J'[r]q$ ergibt sich

$$|s[r+q](\hat{x}, \hat{y}) - s[r](\hat{x}, \hat{y}) - s'[r]q(\hat{x}, \hat{y})| \leq \frac{C \|q\|_{C^1(\mathbb{S}^2)}^2}{|\hat{x} - \hat{y}|}$$

für hinreichend kleines $q \in C^2(\mathbb{S}^2)$. Somit folgt

$$\|S[r+q] - S[r] - S'[r]q\|_{\mathcal{L}(C(\mathbb{S}^2))} \leq C \|q\|_{C^1(\mathbb{S}^2)}^2.$$

■

Bemerkung 5.8 Auch die Abbildungen

$$K, \tilde{K} : \begin{cases} C^2(\mathbb{S}^2) & \rightarrow \mathcal{L}(C(\mathbb{S}^2)) \\ r & \mapsto K[r], \tilde{K}[r] \end{cases}$$

sind Fréchet-differenzierbar (Colton/Kress, 1998, Theorem 5.13; Potthast, Inverse Problems, 1994). ◀

Für den Nachweis der Fréchet-Differenzierbarkeit von F benötigen wir noch das Einfachschichtpotential

$$\text{SL}[r]\varphi(x) = \int_{\mathbb{S}^2} \Phi(x, y[r]) J[r](\hat{y}) \varphi(\hat{y}) \, ds(\hat{y}), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D},$$

mit $\varphi \in C(\mathbb{S}^2)$ und den Spuoperator $R[r] : C(\mathbb{R}^3 \setminus D) \rightarrow \mathbb{S}^2$ mit

$$(R[r]w)(\hat{x}) = w(x[r]), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2.$$

Bemerkung 5.9 Wie im Beweis von Satz 5.7 erhalten wir

$$(\text{SL}'[r]q)\varphi(x) = \int_{\mathbb{S}^2} [-\nabla\Psi(x - y[r]) \cdot y[q] J[r](\hat{y}) + \Psi(x - y[r]) J'[r]q(\hat{y})] \varphi(\hat{y}) \, ds(\hat{y})$$

Für $\varphi \in C^{0,\alpha}(\mathbb{S}^2)$ gilt $\text{SL}[r]\varphi \in C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ mit

$$\nabla \text{SL}[r]\varphi \Big|_+ (\hat{x}) = \int_{\mathbb{S}^2} \Psi(x[r] - y[r]) J[r](\hat{y}) \varphi(\hat{y}) \, ds(\hat{y}) - \frac{1}{2} \varphi(\hat{x}) \nu[r](\hat{x})$$

für $\hat{x} \in \mathbb{S}^2$ (Beweis wie bei Sprungbeziehung für DL φ (Satz 4.11), siehe auch Colton/Kress, 1998, Theorem 3.3).

Wir schreiben

$$\begin{aligned} (\text{SL}'[r]q)\varphi(x) &= - \sum_{j=1}^3 \partial_j \int_{\mathbb{S}^2} \Psi(x - y[r]) J[r](\hat{y}) y_j[q] \varphi(\hat{y}) \, ds(\hat{y}) \\ &\quad + \int_{\mathbb{S}^2} \Psi(x - y[r]) J'[r]q(\hat{y}) \varphi(\hat{y}) \, ds(\hat{y}), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} [R[r](\text{SL}'[r]q)\varphi](\hat{x}) &= \int_{\mathbb{S}^2} \left(\nabla \Psi(x[r] - y[r]) \cdot (-y[q]) J[r](\hat{y}) \right. \\ &\quad \left. + \Psi(x[r] - y[r]) J'[r]q(\hat{y}) \varphi(\hat{y}) \right) ds(\hat{y}) \\ &\quad - \frac{1}{2} J[r](\hat{x}) \varphi(\hat{x}) x[q] \cdot \nu[r](\hat{x}), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2. \end{aligned}$$

Mit der Formel für $S'[r]q$ aus dem Beweis von Satz 5.7 ergibt sich für $\hat{x} \in \mathbb{S}^2$

$$\begin{aligned} &[R[r](\text{SL}'[r]q)\varphi](\hat{x}) \\ &= (S'[r]q)\varphi(\hat{x}) - x[q] \cdot \left[\int_{\mathbb{S}^2} \nabla \Psi(x[r] - y[r]) J[r](\hat{y}) \varphi(\hat{y}) \, ds(\hat{y}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} J[r](\hat{x}) \varphi(\hat{x}) \nu[r](\hat{x}) \right] \\ &= (S'[r]q)\varphi(x) - x[q] \cdot [R[r]\nabla \text{SL}[r]\varphi](\hat{x}), \end{aligned}$$

Somit ist

$$(S'[r]q)\varphi = R[r](\text{SL}'[r]q)\varphi + x[q] \cdot R[r]\nabla \text{SL}[r]\varphi$$

◀

Lemma 5.10 *Seien X, Y normierte Räume, $U \subseteq X$ offen und $A : r \mapsto A[r]$, $U \rightarrow \mathcal{L}(Y)$ ein Fréchet-differenzierbarer Operator. Ferner sei $A[r]$ für $r \in U$ bijektiv, $A^{-1}[r] \in \mathcal{L}(Y)$. Dann ist $A^{-1}[r]$ Fréchet-differenzierbar für alle $r \in U$ mit*

$$A^{-1}[r]'q = -A^{-1}[r]A'[r]qA^{-1}[r], \quad r \in U.$$

Beweis: Da A auf U Fréchet-differenzierbar ist, gilt für $r \in U$:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{\|q\|} \|A[r + q] - A[r] - A'[r]q\| = 0.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \|A[r + q] - A[r]\| &\leq \|A[r + q] - A[r] - A'[r]q\| + \|A'[r]q\| \\ &\leq \frac{\|A[r + q] - A[r] - A'[r]q\|}{\|q\|} \|q\| + \|A'[r]\| \|q\|, \end{aligned}$$

Es existiert also eine Konstante $C_1(r)$ mit

$$\|A[r + q] - A[r]\| \leq C_1(r) \|q\|.$$

Hieraus ergibt sich mit der Neumann'schen Reihe für hinreichend kleines q die Abschätzung

$$\|A^{-1}[r + q] - A^{-1}[r]\| \leq C_2(r) \|q\|$$

mit einer geeigneten Konstanten $C_2(r)$.

Ferner folgt aus der Fréchet-Differenzierbarkeit von A

$$\begin{aligned} &A[r] (A^{-1}[r + q] - A^{-1}[r] + A^{-1}[r] A'[r]q A^{-1}) A[r] \\ &= A[r] A^{-1}[r + q] A[r] - A[r] + A'[r]q \\ &= (A[r + q] - A[r]) A^{-1}[r + q] (A[r + q] - A[r]) - A[r + q] + A[r] + A'[r]q \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} &\|A^{-1}[r + q] - A^{-1}[r] + A^{-1}[r] A'[r]q A^{-1}[r]\| \\ &\leq \|A^{-1}[r]\|^2 (\|A[r + q] - A[r]\|^2 \|A^{-1}[r + q]\| + \|A[r + q] - A[r] - A'[r]q\|) \\ &\leq \|A^{-1}[r]\|^2 (C_1^2(r) \|q\|^2 (\|A^{-1}[r]\| + C_2(r) \|q\|) + \|A[r + q] - A[r] - A'[r]q\|) \end{aligned}$$

Es folgt

$$\lim_{\|q\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|q\|} \|A^{-1}[r + q] - A^{-1}[r] + A^{-1}[r] A'[r]q A^{-1}[r]\| = 0$$

für alle $r \in U$. ■

Satz 5.11 *Der Operator F gemäß Definition 5.5 ist Fréchet-differenzierbar mit*

$$F'[r]q = v^\infty,$$

wobei v^∞ das Fernfeld der Lösung der Helmholtz-Gleichung in $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ ist, die der SAB genügt und die Randbedingung

$$v = -\nu[r] \cdot x[q] \frac{\partial u^t}{\partial \nu} \quad \text{auf } \partial D$$

erfüllt.

Beweis: Setze

$$\psi[r](\hat{x}) = \frac{\partial u^t}{\partial \nu}(r(\hat{x})\hat{x}), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2.$$

Nach den Darstellungssätzen ist

$$\left. \begin{aligned} u^s(x) &= \int_{\partial D} \left(\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} u^s(y) - \Phi(x, y) \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(y) \right) ds(y) \\ 0 &= \int_{\partial D} \left(\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} u^i(y) - \Phi(x, y) \frac{\partial u^i}{\partial \nu}(y) \right) ds(y) \end{aligned} \right\} x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}.$$

Die Addition beider Gleichungen unter Ausnutzung der Randbedingung ergibt

$$u^s = -\text{SL} \frac{\partial u^t}{\partial \nu}.$$

Die Stetigkeit des Einfachschichtpotentials liefert

$$u^i = -u^s = S \frac{\partial u^t}{\partial \nu} \quad \text{auf } \partial D \quad \text{bzw.} \quad R[r]u^i = S[r]\psi[r] \quad \text{auf } \mathbb{S}^2.$$

Mit der Normalableitung von $\text{SL} \frac{\partial u^t}{\partial \nu}$ erhalten wir

$$\frac{\partial u^s}{\partial \nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial u^t}{\partial \nu} - \tilde{K} \frac{\partial u^t}{\partial \nu} \quad \text{auf } \partial D$$

bzw.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u^t}{\partial \nu} + \tilde{K} \frac{\partial u^t}{\partial \nu} = \frac{\partial u^i}{\partial \nu} \quad \text{auf } \partial D.$$

Auch diese Gleichung schreiben wir mit $\psi[r]$ um und addieren das 2i-fache der Gleichung für $R[r]u^i$,

$$\psi[r] + 2\tilde{K}[r]\Psi[r] - 2iS[r]\psi[r] = 2\nu[r] \cdot R[r]\nabla u^i - 2iR[r]u^i \quad \text{auf } \mathbb{S}^2.$$

Nach Lemma 5.10 ist $(I + 2\tilde{K}[r] - 2iS[r])^{-1}$ Fréchet-differenzierbar bezüglich r , ebenso die rechte Seite obiger Gleichung. Somit ist $\psi[r]$ Fréchet-differenzierbar bezüglich r .

Setzen wir $u^s[r] = -\text{SL}[r]\psi[r]$, so ist die Abbildung $r \mapsto u^s[r]$ Fréchet-differenzierbar von $C^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow C(U)$ für jedes kompakte $U \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$. Die Kettenregel liefert

$$v = u^s[r]'q = -\text{SL}[r]\psi'[r]q - (\text{SL}'[r]q)\psi[r].$$

v ist eine Lösung der Helmholtz-Gleichung, die der SAB genügt. Es gilt nach Bemerkung 5.9

$$\begin{aligned} R[r]v &= -S[r]\psi'[r]q - (S'[r]q)\psi[r] + x[q] \cdot R[r]\nabla \text{SL}[r]\psi[r] \\ &= -(S[r]\psi[r])'q - x[q] \cdot R[r]\nabla u^s[r]. \end{aligned}$$

Indem wir wieder die Gleichung für $R[r]u^i$ verwenden, folgt andererseits

$$(S[r]\psi[r])'q = x[q] \cdot R[r]\nabla u^i.$$

Somit ist

$$R[r]v = -x[q] \cdot R[r]\nabla u^t.$$

Da $u^t = 0$ auf ∂D ist, gilt dies auch für die Tangentialebene. Damit lautet die Randbedingung für v

$$R[r]v = -\nu[r] \cdot x[q]R[r]\frac{\partial u^t}{\partial \nu}.$$

Setzt man $U = \{|x| = a\}$ für hinreichend großes a , so haben wir speziell gezeigt:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{\|q\|_{C^2(\mathbb{S}^2)}} \|u^s[r+q] - u^s[r] - v\|_{C(U)} = 0.$$

Da Fernfelder stetig von den gestreuten Feldern abhängen (Satz 3.15 und dessen Beweis), folgt

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{\|q\|_{C^2(\mathbb{S}^2)}} \|F(r+q) - F(r) - v^\infty\|_{C^2(\mathbb{S}^2)} = 0.$$

Dies war zu zeigen. ■

Satz 5.12 *Der Operator $F'[r]$ ist injektiv.*

Beweis: Gilt $F'[r]q = 0$, so hat die Lösung v des Problems aus Satz 5.11 ein verschwindendes Fernfeld v_∞ . Es folgt $v = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ und somit $v|_{\partial D} = 0$. Es ist also $\nu[r] \cdot x[q] = 0$. Aus Lemma 5.6 und dem anschließenden Kommentar folgt

$$0 = x[q] \cdot \nu[r] = q(\hat{x}) \frac{r(\hat{x}) \hat{x} \cdot \hat{x} - \text{Grad } r(\hat{x}) \cdot \hat{x}}{\sqrt{r(\hat{x})^2 + \text{Grad } r(\hat{x})^2}} = \frac{q(\hat{x}) r(\hat{x})}{\sqrt{r(\hat{x})^2 + \text{Grad } r(\hat{x})^2}}.$$

Somit ist $q = 0$. ■

Mit den nun gezeigten Aussagen, ist es möglich, die Newton-Iterierten

$$r_{n+1} = r_n + (F'[r])^{-1}(F(r_n) - u_\infty)$$

zu berechnen. In vielen numerischen Beispielen sind damit gute Rekonstruktionen erzielt worden. Es ist jedoch bisher noch nicht gelungen, die Konvergenz dieses Verfahrens für inverse Streuprobleme nachzuweisen. Hohage schlägt in seiner Dissertation eine Bedingung der Form

$$\|F(r) - F(\tilde{r}) - F'[r](r - \tilde{r})\| \leq c \|r - \tilde{r}\| \|F(r) - F(\tilde{r})\|$$

für F vor und kann damit Konvergenz zeigen (vgl. dazu die Bedingungen aus der Vorlesung Inverse Probleme). Für Streuprobleme konnte diese Bedingung bisher jedoch nicht nachgewiesen werden.

Neben Vorteilen wie etwa eine relativ gute Qualität der Rekonstruktionen auch bei wenigen Daten (etwa nur ein einziges einfallendes Feld) weisen iterativer Verfahren auch einige Nachteile auf:

- die geometrische Beschaffenheit des Streuers muss bekannt sein (etwa die Anzahl Komponenten), um eine Darstellung der Oberfläche zu haben, mit der Iterierte bestimmt werden können,
- die physikalische Beschaffenheit muss bekannt sein (d.h. die Randbedingung),
- in jedem Iterationsschritt muss (mindestens) ein direktes Problem gelöst werden.

Sogenannte *Sampling Methoden* versuchen diese Probleme zu umgehen, benötigen aber deutlich mehr Daten. Als ein Beispiel einer solchen Methode wollen wir die **Faktorisierungsmethode** vorstellen. Dabei wollen wir von der Situation eines offenen, beschränkten Streuers $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ausgehen. Die einfallende ebene Welle notieren wir mit ihrer Einfallsrichtung d als

$$u^i(x, d) = \exp(ik d \cdot x), \quad d \in \mathbb{S}^1, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

das zugehörige gestreute Feld als $u^s(\cdot, d)$ mit Fernfeld $u_\infty(\cdot, d)$. Damit können wir einen linearen Integraloperator definieren,

$$Fg(\hat{x}) = \overline{\gamma_2} \int_{\mathbb{S}^1} u_\infty(\hat{x}, d) g(d) ds(d), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^1,$$

mit der Konstante γ_2 aus Satz und Definition 2.11.

Unser Ziel ist die direkte Charakterisierung von D aus F . Wir nennen F den **Fernfeld-Operator** und fassen F als Element von $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{S}^1))$ auf. Um F weiter zu charakterisieren, werden Räume von Randwerten auf ∂D benötigt. Dazu schränken wir uns auf solche D ein, deren Rand eine C^1 -glatte geschlossene Kurve ist. Es existiert also $\eta \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$, 2π periodisch mit $\partial D = \eta(-\pi, \pi]$. In der Vorlesung „Inverse Probleme“ hatten wir den Sobolev-Raum $H^s(\mathbb{S}^1)$ kennengelernt,

$$H^s(\mathbb{S}^1) = \left\{ u(\cos \varphi, \sin \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{in\varphi} : \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2)^s |\alpha_n|^2 < \infty \right\}.$$

Der Raum enthält also alle Fourier-Reihen mit hinreichend schnell abfallenden Koeffizienten. Für $s = 0$ erhält man $L^2(\mathbb{S}^1)$. Mehr Details zu diesen Sobolev-Räumen werden in Kapitel 6 präsentiert werden. Für uns reicht zunächst die Feststellung, dass es sich mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{S}^1)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2)^s \alpha_n \overline{\beta_n} \quad \text{für} \quad u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{in\varphi}, \quad v = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n e^{in\varphi},$$

um einen Hilbert-Raum handelt.

Nun definieren wir $H^s(\partial D)$, $0 \leq s \leq 1$, durch

$$\varphi \in H^s(\partial D) \Leftrightarrow \varphi \circ \eta \in H^s(\mathbb{S}^1)$$

mit Skalarprodukt

$$(\varphi, \psi)_{H^s(\partial D)} = (\varphi \circ \eta, \psi \circ \eta)_{H^s(\mathbb{S}^1)}$$

und Norm

$$\|\varphi\|_{H^s(\partial D)} = \left((\varphi \circ \eta, \varphi \circ \eta)_{H^s(\mathbb{S}^1)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir setzen $H^{-s}(\partial D)$ für den Dualraum von $H^s(\partial D)$, $0 \leq s \leq 1$. Da für jedes $\psi \in L^2(\partial D)$ durch $\int_{\partial D} \varphi \overline{\psi} ds$, $\varphi \in H^s(\partial D)$, eine stetige Linearform auf $H^s(\partial D)$ definiert wird, fasst man $H^{-s}(\partial D)$ als Oberraum von $L^2(\partial D)$ auf.

Bemerkung 5.13 Sei k^2 kein Direkter Eigenwert von $-\Delta$ in D . Der Einfachschichtoperator $S : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$ lässt sich stetig als Operator $S : H^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ fortsetzen. Zwischen diesen Räumen ist es ein Isomorphismus. Der Lösungsoperator $G : C(\partial D) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^1)$, $u^s|_{\partial D} \mapsto u_\infty$ des Dirichlet-Streuproblems lässt sich stetig von $G : H^{\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^1)$ fortsetzen. Zwischen diesen Räumen ist G injektiv und hat einen dichten Wertebereich. ◀

Für eine detailliertere Einführung von $H^s(\partial D)$ siehe auch Kress, Linear Integral Equations, 1998, Kapitel 5. Die Eigenschaften von S bzw. G werden beispielsweise in Lemma 1.14 und Theorem 1.1 von Kirsch/Grinberg, The Factorization Method for Inverse Problems, 2008, gezeigt.

Satz 5.14 Mit den Adjungierten $G^* : L^2(\mathbb{S}^1) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$ und $S^* : H^{-\frac{1}{2}}(\partial D) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ gilt

$$F = -GS^*G^*.$$

Beweis: Definiere $H : L^2(\mathbb{S}^1) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ durch

$$Hg(x) = \int_{\mathbb{S}^1} \exp(ik d \cdot x) g(d) ds(d), \quad x \in \partial D.$$

Wegen der Linearität des Streuproblems gilt dann

$$F = -\overline{\gamma_2} GH.$$

Man rechnet direkt nach für $\psi \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$:

$$H^*\psi(d) = \int_{\partial D} \exp(-ik d \cdot x) \psi(x) ds(x), \quad d \in \mathbb{S}^1.$$

Damit ist $\gamma_2 H^*\psi$ das Fernfeld von $SL\psi$, d.h. $\gamma_2 H^*\psi = GS\psi$, $\psi \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial D)$. Es folgt

$$Hg = \frac{1}{\gamma_2} S^* G^* g, \quad g \in L^2(S^2).$$

Indem wir oben einsetzen, folgt die Behauptung. ■

Kommentar: Ist k^2 kein Dirichlet Eigenwert von $-\Delta$ in D , so ist $F : L^2(S) \rightarrow L^2(S^1)$ injektiv mit dichtem Wertebereich. Wir werden dies im folgenden voraussetzen.

Wir benötigen nun eine Verallgemeinerung des Lemmas 5.15 aus der Vorlesung Inverse Probleme. Wir werden diese Aussage und ihre Anwendbarkeit auf die vorliegende Situation nicht beweisen, sondern verweisen auf die Literatur.

Satz 5.15 Sei X ein reflexiver Banach-Raum, Y ein Hilbert-Raum mit $X \subseteq Y$, ferner $B : Y \rightarrow Y$, $A : X \rightarrow Y$ linear und $T \in \mathcal{L}(X^*, X)$ mit

$$B = ATA^*.$$

Ist T koerzitiv auf $\text{Bild}(A^*)$, d.h.

$$|(\psi, T\psi)| \geq c\|\psi\|^2, \quad \psi \in \text{Bild}(A^*) \subseteq X^*$$

so gilt für alle $\varphi \in Y \setminus \{0\}$:

$$\varphi \in \text{Bild}(A) \Leftrightarrow \inf\{|(\psi, B\psi)| : \psi \in Y, (\psi, \varphi) = 1\} > 0.$$

Beweis: Kirsch/Grinberg 2008, Theorem 1.16 und Lemma 1.17. ■

Wir können Satz 5.15 zum Beispiel mit $Y = L^2(\mathbb{S}^1)$, $X = H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$, $B = F$, $A = G$, $T = S$ anwenden. Dies formulieren wir als ein Lemma.

Lemma 5.16 Es sei k^2 kein Eigenwert von $-\Delta$ in D . Dann erfüllt S^* die Voraussetzung an T aus Satz 5.15.

Beweis: Kirsch/Grinberg 2008, Lemma 1.14. ■

Um die Charakterisierung von D durch die Faktorisierungsmethode herzuleiten, benötigen wir noch eine wichtige Eigenschaft von F :

Satz 5.17 *Der Operator F ist normal, d.h.*

$$F^*F = FF^*.$$

Hieraus folgt, dass $L^2(\mathbb{S}^1)$ ein vollständiges Orthonormalsystem aus Eigenvektoren von F besitzt.

Beweis: Es seien v^s, w^s die gestreuten Felder zu Randdaten Hg, Hh auf ∂D , $g, h \in L^2(\mathbb{S}^1)$. Wir wählen R so groß, dass $\overline{D} \subseteq B_R(0)$ gilt und wenden die zweite Green'sche Identität auf die totalen Felder in $B_R(0) \setminus \overline{D}$ an. Es folgt

$$0 = \int_{|x|=R} \left(v^t \frac{\partial \overline{w^t}}{\partial \nu} - \overline{w^t} \frac{\partial v^t}{\partial \nu} \right) ds.$$

Wir schreiben nun jeweils die totalen Felder als Summe von gestreutem und einfallendem Feld, multiplizieren aus und betrachten die so auftretenden Integrale getrennt. Wie in Beweis des Darstellungssatzes im Außenraum 2.10 folgt mit der 1. Green'schen Identität und der SAB

$$\int_{|x|=R} \left(v^s \frac{\partial \overline{w^s}}{\partial \nu} - \overline{w^s} \frac{\partial v^s}{\partial \nu} \right) ds \longrightarrow -2i k (v^\infty, w^\infty) = -\frac{2i k}{|\gamma_2|^2} (Fg, Fh)$$

für $R \rightarrow \infty$. Mit $v^i(x) = \int_{\mathbb{S}^1} \exp(ikx \cdot d) g(d) ds(d)$, $x \in \mathbb{R}^2$, folgt

$$\begin{aligned} \int_{|x|=R} \left[v^i \frac{\partial \overline{w^s}}{\partial \nu} - \overline{w^s} \frac{\partial v^i}{\partial \nu} \right] ds &= \int_{\mathbb{S}^1} g(d) \int_{|x|=R} \left(e^{ikd \cdot x} \frac{\partial \overline{w^s}}{\partial \nu} - w^s(x) \frac{\partial}{\partial \nu} e^{ikd \cdot x} \right) ds \\ &= -\frac{1}{\gamma_2} (g, w_\infty) = -\frac{1}{|\gamma_2|^2} (g, Fh) \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\int_{|x|=R} \left[v^s \frac{\partial \overline{w^i}}{\partial \nu} - \overline{w^i} \frac{\partial v^s}{\partial \nu} \right] ds = \frac{1}{|\gamma_2|^2} (Fg, h)$$

Es folgt für $R \rightarrow \infty$:

$$0 = -\frac{2ik}{|\gamma_2|^2} (Fg, Fh) - \frac{1}{|\gamma_2|^2} (g, Fh) + \frac{1}{|\gamma_2|^2} (Fg, h).$$

Als ein Skalarprodukt geschrieben ist die

$$(2ik F^* F g - Fg + F^* g, h) = 0 \quad \text{für alle } g, h \in L^2(\mathbb{S}^1)$$

oder

$$2ik F^* F = F - F^*.$$

Nun berechnen wir

$$\begin{aligned} (I - 2ik F^*)(I + 2ik F) &= I + 2ik(F - F^*) + 4k^2 F^* F \\ &= I - 4k^2 F^* F + 4k^2 F^* F = I \end{aligned}$$

Damit besitzt $I + 2ik F$ eine Linksinverse, ist also injektiv. Als kompakte Störung der Identität ergibt sich aus der Riesztheorie die Surjektivität. Somit ist $I + 2ik F$ unitär:

$$0 = (I - 2ik F^*)(I + 2ik F) - (I + 2ik F)(I - 2ik F^*) = 4k^2 (F^* F - F F^*).$$

■

Mit Satz 5.17 können wir nun den Operator $(F^* F)^{\frac{1}{4}}$ definieren, der sich mit einem vollständigen ONS aus Eigenvektoren (λ_n, g_n) als

$$(F^* F)^{\frac{1}{4}} g = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{\frac{1}{2}} (g, g_n) g_n$$

darstellt. Wir faktorisieren

$$F = (F^* F)^{\frac{1}{4}} \hat{F} (F^* F)^{\frac{1}{4}}$$

mit dem Operator \hat{F} , der durch

$$\hat{F} g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{|\lambda_n|} (g, g_n) g_n, \quad g \in L^2(\mathbb{S}^1),$$

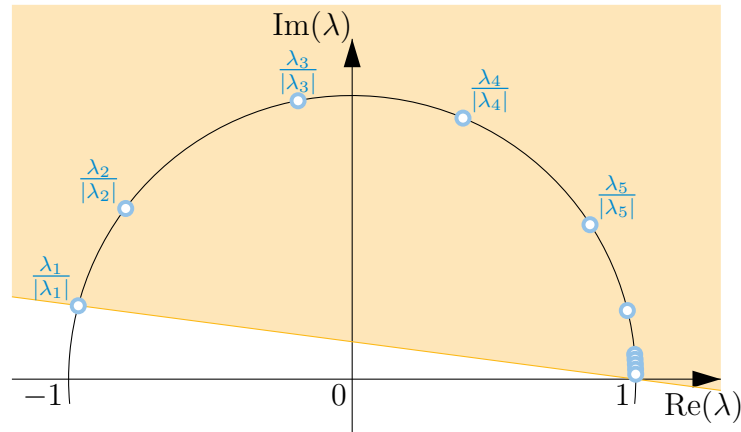
gegeben ist. Da der Operator $I + 2ik F$ unitär ist, liegt jeder Eigenwert von F auf einem Kreis um $i/(2k)$ mit Radius $1/(2k)$. Es folgt

$$\operatorname{Im}(\lambda_n) > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Man kann ferner zeigen (Kirsch/Grinberg, Beweis Theorem 1.23):

$$\frac{\lambda_n}{|\lambda_n|} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Damit liegen alle Eigenwerte $\lambda_n/|\lambda_n|$ in einer Halbebene von \mathbb{C} , die den Ursprung nicht enthält (siehe die Abbildung).



Aus der Definition von \hat{F} folgt somit

$$\left| (\hat{F}g, g) \right| \geq c \|g\|^2.$$

Wir können damit Satz 5.15 auch auf die Faktorisierung $F = (F^*F)^{\frac{1}{4}} \hat{F} (F^*F)^{\frac{1}{4}}$ anwenden. Es ergeben sich die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} h &\in \text{Bild} \left((F^*F)^{\frac{1}{4}} \right), \quad h \neq 0 \\ \iff \inf \{ |(g, Fg)| : g \in L^2(\mathbb{S}^1), (g, h) = 1 \} &> 0 \\ \iff h &\in \text{Bild}(G), \quad h \neq 0. \end{aligned}$$

Aus der Kenntnis von F können wir für gegebenes h die erste Bedingung überprüfen (z.B. mit dem Satz von Picard aus der Vorlesung Inverse Probleme). Es bleibt zu zeigen, dass wir durch eine spezielle Wahl von h in der letzten Äquivalenz den Streuer charakterisieren können.

Lemma 5.18 Sei $z \in \mathbb{R}^2$.

$$z \in D \iff \Phi_z \in \text{Bild}(G),$$

wobei $\Phi_z(\hat{x}) = \exp(-ik \hat{x} \cdot z)$, $\hat{x} \in \mathbb{S}^1$.

Beweis: Beachte, dass Φ_z das Fernfeld eines Punktquelle $\Phi(\cdot, z)$ im Punkt z ist (vgl. den Beweis von Satz und Definition 2.11).

Sei zunächst $z \in D$. Dann liefert die Definition $f(x) = \frac{1}{\gamma_2} \Phi(x, z)$, $x \in \partial D$) eine Funktion $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ und $Gf = \Phi_z$.

Wir nehmen nun $z \notin D$ an und dass es ein $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$ mit $Gf = \Phi_z$ gibt. Sei v Lösung des zugehörigen äußeren Dirichlet'schen Randwertproblems, also

$$v_\infty = Gf = \Phi_z.$$

Somit ist wegen der eindeutigen Zuordnung von Fern- und abstrahlenden Feldern

$$v(x) = \Phi(x, z), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_R(0)}$$

mit $D \subseteq B_R(0)$. Da v , $\Phi(\cdot, z)$ als Lösungen der Helmholtz-Gleichung analytische Funktionen sind, gilt

$$v(x) = \Phi(x, z), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus (\overline{D} \cup \{z\}).$$

Für $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ ergibt sich nun der Widerspruch, dass $\Phi(\cdot, z)$ nach z nicht analytisch fortsetzbar ist, v aber schon.

Für $z \in \partial D$ folgt $f = \Phi(\cdot, z)|_{\partial D}$. Dies ist aber ein Widerspruch zu $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$, da die Singularität von $\Phi(x, z)$ für $x = z$ so beschaffen ist, dass $\Phi(\cdot, z) \notin H^1(B_R(0) \setminus \overline{D})$. ■

Wir formulieren die Kombination dieses Lemmas mit den zuvor gezeigten Äquivalenzen als abschließende Folgerung.

Korollar 5.19 Sei $z \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$z \in D \iff \Phi_z \in \text{Bild} \left((F^*F)^{\frac{1}{4}} \right).$$

Für die numerische Umsetzung der Faktorisierungsmethode ersetzt man das Integral in der Definition des Fernfeldoperators durch eine Approximation, zum Beispiel durch eine Quadraturformel und wertet auch nur in eine endliche Zahl von Richtungen aus. Man kann nun die Eigenwerte von F durch die Eigenwerte der so erhaltenen Matrix approximieren. Mit dem Satz von Picard lässt sich die Bedingung aus dem Korollar so formulieren, dass eine gewisse Reihe genau dann konvergiert, wenn $z \in D$ ist. Numerisch können wir nun eine (Approximation an eine) Partialsumme dieser Reihe berechnen. Divergiert die Reihe ($z \notin D$), so sollte die Partialsumme recht große Werte haben, konvergiert die Reihe ($z \in D$), so sind

die Werte eher klein. Indem wir die Partialsumme (genauer: deren Kehrwert) für verschiedene $z \in \mathbb{R}^2$ plotten, erhalten wir ein Bild des Streuers.

Auf der Webseite <http://www.math.kit.edu/iag1/~kirsch/page/buecher/en> von Prof. A. Kirsch finden sich verschiedene farbige Abbildungen aus dem Buch *The Factorization Method for Inverse Problems*, Kirsch/Grinberg, 2008. Die Abbildungen Figure 1.7 – Figure 3.5 sind dabei Rekonstruktionen aus Streuproblemen, die mit dem oben skizzierten Verfahren erstellt wurden.

Kapitel 6

Numerische Lösung von Randintegralgleichungen

In diesem Kapitel soll ein Verfahren zur numerischen Lösung von Randintegralgleichungen vorgestellt werden, das wir als **Quadratur-** oder **Nyström-Verfahren** bezeichnen. Es eignet sich gut (und ist überaus effizient), wenn ∂D glatt ist. Für Gebiete mit Ecken sind z.B. Galerkin-Verfahren geeigneter (siehe z.B. Kress, *Linear Integral Equations*, 2nd edition, 1998; Sauter/Schwab, *Randelementmethoden: Analyse, Numerik und Implementierung schneller Algorithmen*, 2004; Hackbusch, *Integralgleichungen. Theorie und Numerik*, 1997 für ausführliche Darstellungen).

Wir setzen in diesem Kapitel voraus, dass $D \subseteq \mathbb{R}^2$ C^∞ -glatt ist und nur aus einer Zusammenhangskomponente besteht. In diesem Fall ist ∂D eine geschlossene Jordan-Kurve mit einer regulären Parametrisierung $\eta \in C^\infty([-\pi, \pi]; \mathbb{R}^2)$, die sich 2π -periodisch nach $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ fortsetzen lässt.

Kommentar: Die C^∞ -Voraussetzung ist für das Funktionieren der Methode nicht erforderlich, erleichtert aber die Formulierung der Aussagen. Für die Implementierung der Methode benötigt man zweite Ableitungen von η , für die Konvergenz ist $\eta \in C^3(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ notwendig. Für $N = 3$ ist Analyse und Numerik solch effizienter Verfahren für glatte Ränder ein aktuelles Forschungsgebiet. Ein Verfahren mit vergleichbaren Konvergenzraten wurde beispielsweise meiner Habilitationsschrift *Scattering by Biperiodic Layered Media: The Integral Equation Approach* (2010) untersucht. Die effiziente Implementierung ist ein noch offenes Problem.

Wir wollen nun das Dirichlet'sche Streuproblem lösen, das nach Satz 4.16 auf die Integralgleichung

$$\varphi(x) - 2 \int_{\partial D} \left(\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} + i\zeta \Phi(x, y) \right) \varphi(y) \, ds(y) = \psi(x), \quad x \in \partial D,$$

mit einer Konstante $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ führt. Mit

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(\eta(t)), \quad \tilde{\psi}(t) = \psi(\eta(t)), \quad t \in [-\pi, \pi],$$

erhalten wir die Integralgleichung

$$\tilde{\varphi}(t) - 2 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\partial \Phi(\eta(t), \eta(s))}{\partial \nu(\eta(s))} + i\zeta \Phi(\eta(t), \eta(s)) \right) \tilde{\varphi}(s) |\eta'(s)| ds = \tilde{\psi}(t)$$

für $t \in [-\pi, \pi]$. Setzen wir

$$K(t, s) = 2 \left(\frac{\partial \Phi(\eta(t), \eta(s))}{\partial \nu(\eta(s))} + i\zeta \Phi(\eta(t), \eta(s)) \right) |\eta'(s)|, \quad t, s \in [-\pi, \pi], t \neq s,$$

und indem wir die „ \sim “ der Einfachheit wegen wieder weglassen, schreiben wir diese Integralgleichung als

$$\varphi(t) - \int_{-\pi}^{\pi} K(t, s) \varphi(s) ds = \psi(t), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Um ein effizientes numerisches Verfahren zu entwickeln, gilt es, die schwache Singularität in der Kernfunktion genau zu charakterisieren.

Lemma 6.1 *Es existieren Funktionen $K_1, K_2 \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, 2π -periodisch bezüglich beider Argumente, mit*

$$K(t, s) = \frac{1}{2\pi} \log \left(4 \sin^2 \frac{t-s}{2} \right) K_1(t, s) + K_2(t, s), \quad t, s \in \mathbb{R}, t-s \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} K(t, s) &= \frac{ik}{2} \frac{H_1^{(1)}(k|\eta(t) - \eta(s)|)}{|\eta(t) - \eta(s)|} \begin{pmatrix} \eta_2'(s) \\ -\eta_1'(s) \end{pmatrix} \cdot (\eta(s) - \eta(t)) \\ &\quad - \frac{\zeta}{2} H_0^{(1)}(k|\eta(t) - \eta(s)|) \sqrt{\eta_1'(s)^2 + \eta_2'(s)^2}. \end{aligned}$$

Die Singularitäten stecken in den Hankel-Funktionen. Nach Satz und Definition 1.4 gilt

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(z) &= \frac{2i}{\pi} \left(\log \frac{z}{2} + C \right) J_0(z) + F_0(z), \\ \frac{H_1^{(1)}(z)}{z} &= \frac{2i}{\pi} \left(\log \frac{z}{2} + C \right) \frac{J_1(z)}{z} - \frac{2i}{\pi z^2} + F_1(z), \end{aligned}$$

mit analytischen, geraden Funktionen F_j , $j = 1, 2$. Insbesondere gilt $F_1(0) = 1$, $F_2(0) = 0$. Mit

$$\begin{aligned} \log \frac{k |\eta(s) - \eta(t)|}{2} &= \log |s - t| + \log \left| \frac{\eta(s) - \eta(t)}{s - t} \right| + \log \frac{k}{2} \\ &= \frac{1}{2} \log \left(4 \sin^2 \frac{t-s}{2} \right) - \frac{1}{2} \log \frac{4 \sin^2 \frac{t-s}{2}}{(t-s)^2} \\ &\quad + \log \left| \frac{\eta(s) - \eta(t)}{s - t} \right| + \log \frac{k}{2} \end{aligned}$$

führt dies auf die Wahl

$$\begin{aligned} K_1(t, s) &= k \frac{J_1(k |\eta(t) - \eta(s)|)}{|\eta(t) - \eta(s)|} \begin{pmatrix} \eta'_2(s) \\ -\eta'_1(s) \end{pmatrix} \cdot (\eta(t) - \eta(s)) \\ &\quad - i\zeta J_0(k |\eta(t) - \eta(s)|) \sqrt{\eta'_1(s)^2 + \eta'_2(s)^2}, \quad (6.1) \\ K_2(t, s) &= K(t, s) - \frac{1}{2\pi} \log \left(4 \sin^2 \frac{t-s}{2} \right) K_1(t, s) \end{aligned}$$

für $t, s \in (-\pi, \pi]$ mit $t \neq s$. Aus den Potenzreihendarstellungen der Bessel-Funktionen ergibt sich, dass $J_0(z)$ und $J_1(z)/z$ analytisch in z^2 sind. Da $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ vorausgesetzt war, ergibt sich $K_1 \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Für K_2 ergibt sich dies ebenfalls durch eine genaue Analyse der verbleibenden Terme. Insbesondere muss man hier verwenden, dass sich aus mit Satz von Taylor für alle $J \in \mathbb{N}$ eine Darstellung

$$\begin{aligned} \frac{\begin{pmatrix} \eta'_2(s) \\ -\eta'_1(s) \end{pmatrix} \cdot (\eta(t) - \eta(s))}{|\eta(s) - \eta(t)|^2} &= \sum_{j=2}^J \frac{1}{j!} \left(\eta'_1(s) \eta_2^{(j)}(s) - \eta'_2(s) \eta_1^{(j)}(s) \right) \frac{(s-t)^j}{|\eta(s) - \eta(t)|^2} \\ &\quad + \frac{1}{(J+1)!} \left(\eta'_1(s) \eta_2^{(J+1)}(\sigma_1) - \eta'_2(s) \eta_1^{(J+2)}(\sigma_2) \right) \frac{(s-t)^{J+1}}{|\eta(s) - \eta(t)|^2} \end{aligned}$$

mit Stellen σ_1, σ_2 zwischen s und t hinschreiben lässt. Hieraus lässt sich die beliebig häufige Differenzierbarkeit dieses Terms ableiten. Die Periodizität der K_j , $j = 1, 2$, ergibt sich direkt aus der Definition und der Periodizität von K .

Für die Implementierung ist der Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow t} K_2(t, s) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\eta'_1(t) \eta_2''(t) - \eta'_2(t) \eta_1''(t)}{\eta'_1(s)^2 + \eta'_2(s)^2} \\ &\quad - \frac{\zeta}{2} \left(1 + \frac{i}{\pi} \log \left(\frac{k^2}{4} |\eta'(t)|^2 \right) + \frac{2iC}{\pi} \right) |\eta'(t)|. \quad (6.2) \end{aligned}$$

ebenfalls wichtig. ■

Wir können nun also ganz allgemein Betrachtungen für eine Integralgleichung der Form

$$\varphi - A\varphi - B\varphi = \psi$$

anstellen, wobei

$$A\varphi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \log \left(4 \sin^2 \frac{t-s}{2} \right) K_1(t, s) \varphi(s) ds,$$

$$B\varphi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} K_2(t, s) \varphi(s) ds,$$

für $t \in [-\pi, \pi]$ mit $K_j \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ und 2π -periodisch bezüglich beider Variablen, $j = 1, 2$. Die Idee des **Nyström-Verfahrens** ist es, die Integrale durch Quadraturformeln zu ersetzen. Zur Motivation des Vorgehens nehmen wir an, dass uns für jedes $N \in \mathbb{N}$ geeignete Formeln für die Quadraturpunkte $t_j = -\pi + j \frac{\pi}{N}$, $j = 0, \dots, 2N-1$, zur Verfügung stehen. Wir erhalten dadurch approximierende Operatoren A_N, B_N mit

$$A_N\varphi(t) = \sum_{j=0}^{2N-1} w_j^{(1)}(t) K_1(t, t_j) \varphi(t_j),$$

$$B_N\varphi(t) = \sum_{j=0}^{2N-1} w_j^{(2)}(t) K_2(t, t_j) \varphi(t_j) ds,$$

für $t \in [-\pi, \pi]$. Hierbei sind $w_j^{(m)}$, $m = 1, 2$, die von t abhängigen Gewichte der Quadraturformeln. Im weiteren Verlauf der Überlegungen werden wir zeigen, dass solche Formeln tatsächlich existieren und die Gewichte explizit bestimmen.

Sind nun die Werte der Dichte in den Quadraturpunkten, $\varphi(t_j)$, $j = 0, \dots, 2N-1$, bekannt, so erhält man aus der approximativen Gleichung

$$\varphi = A_N\varphi + B_N\varphi + \psi$$

die Funktionswerte $\varphi(t)$ für alle $t \in [-\pi, \pi]$, denn auf der rechten Seite gehen eben nur die Funktionswerte in den t_j ein. In den Quadraturpunkten lautet die approximative Gleichung

$$\varphi(t_l) - A_N\varphi(t_l) - B_N\varphi(t_l) = \psi(t_l), \quad l = 0, \dots, 2N-1, \quad (6.3)$$

und dies ist ein $2N-1 \times 2N-1$ -LGS für die Werte $\varphi(t_l)$, $l = 0, \dots, 2N-1$. Es ergeben sich somit die folgenden Fragen:

- Wie wählt man die $w_j^{(m)}$, $m = 1, 2$, $j = 0, \dots, 2N - 1$?
- In welchem Sinne approximieren die A_N, B_N die kontinuierlichen Operatoren A, B ?
- Ist das LGS (6.3) stets lösbar?

Die Approximationseigenschaft der Operatoren werden wir in den periodischen Sobolev-Räumen

$$H^s = \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j e^{ijt} : \sum_{j \in \mathbb{Z}} (1 + |j|^2)^s |a_j|^2 < \infty \right\}$$

für $s \geq 0$ zeigen. Wir erinnern nochmals an einige Eigenschaften dieser Räume, die in allen Details in Kress, Linear Integral Equations, 2. Auflage 1998, Abschnitt 8.1, zu finden sind: Die Räume H^s sind Hilbert-Räume mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{H^s} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (1 + |j|^2)^s a_j \bar{b}_j \quad \text{für } u(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j e^{ijt}, \quad v(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} b_j e^{ijt},$$

und der zugehörigen Norm

$$\|u\|_{H^s} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (1 + |j|^2)^s |a_j|^2.$$

Offensichtlich gilt $H^\sigma \subseteq H^s$ für $\sigma \geq s$. Ist $\sigma > s$, so ist die Einbettung kompakt, d.h. der Abschluss jeder beschränkten Teilmenge von H^σ ist eine kompakte Teilmenge von H^s .

Für $s = 0$ erhalten wir gerade den Raum der Fourier-Reihen mit quadratsummierbaren Koeffizienten, also den $L^2(-\pi, \pi)$. Für $s > 0$ weisen die Koeffizienten ein stärkeres Abfallverhalten auf, die Funktionen sind also glatter als L^2 -Funktionen. Insbesondere gilt

$$H^s \subseteq \{u \in C(\mathbb{R}) : u \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch}\} \quad \text{für } s > \frac{1}{2}.$$

Ist $s = p + \alpha$ mit $p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0, 1)$, so besitzt eine Funktion $u \in H^s$ schwache Ableitungen bis zur Ordnung p , d.h. für $r = 1, \dots, p$ existieren Funktion $u^{(r)} \in H^{s-r}$ mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} u^{(r)}(t) \overline{v(t)} dt = (-1)^r \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \overline{v^{(r)}(t)} dt$$

für alle 2π -periodischen $v \in C^r(\mathbb{R})$. Für klassisch differenzierbare Funktionen u ist dies gerade die Formel, die sich durch partielle Integration ergibt. In Analogie zur Situation bei klassisch differenzierbaren Funktionen gilt auch das folgende Ergebnis:

Lemma 6.2 Sei $s \in \mathbb{N}_0$, und für ein $n \geq s$ gelte $f \in C^n(\mathbb{R})$. Ferner sei f 2π -periodisch. Dann gilt für jedes $\varphi \in H^s$, dass $f\varphi \in H^s$ liegt, mit

$$\|f\varphi\|_{H^s} \leq C (\|f\|_\infty + \|f^{(n)}\|_\infty) \|\varphi\|_{H^s}.$$

Beweis: (i) In einem ersten Schritt definieren wir die Norm

$$\|\varphi\|_s = \left(\int_{-\pi}^{\pi} [|\varphi(t)|^2 + |\varphi^{(s)}(t)|^2] dt \right)^{1/2}$$

für $s \in \mathbb{N}_0$ auf dem Raum der 2π -periodischen Funktionen s -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf \mathbb{R} , und beweisen die Abschätzung

$$c_1 \|\varphi\|_s \leq \|\varphi\|_{H^s} \leq c_2 \|\varphi\|_s$$

mit geeigneten Konstanten c_1, c_2 .

Dazu betrachten wir die Fourierkoeffizienten der s -ten Ableitung von φ . Mit s -maliger partieller Integration, wobei die Periodizität von φ ausgenutzt wird, erhalten wir

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^{(s)}(t) e^{-ijt} dt = (-ij)^s \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{-ijt} dt = (-ij)^s a_j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

für $\varphi(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j e^{ijt}$. Nach der Parseval'schen Gleichung ist damit

$$\|\varphi\|_s^2 = \|\varphi\|_{L^2}^2 + \|\varphi^{(s)}\|_{L^2}^2 = 2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} (1 + j^{2s}) |a_j|^2.$$

Da aber

$$1 + j^{2s} \leq (1 + j^2)^s \leq (2j^2)^s \leq 2^s (1 + j^{2s})$$

ergibt sich die Abschätzung mit $c_1 = 1/\sqrt{2\pi}$ und $c_2 = \sqrt{2^{s-1}/\pi}$.

(ii) Wir zeigen nun die Abschätzung für eine 2π -periodische Funktion $\varphi \in C^s(\mathbb{R})$. Es gilt mit geeigneten Konstanten C

$$\begin{aligned} \|f\varphi\|_{H^s}^2 &\leq c_2^2 \|f\varphi\|_s^2 = c_2^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left(|f(t)\varphi(t)|^2 + \left| \frac{d^s}{dt^s} [f(t)\varphi(t)] \right|^2 \right) dt \\ &= c_2^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left(|f(t)\varphi(t)|^2 + \left| \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} f^{(s-j)}(t) \varphi^{(j)}(t) \right|^2 \right) dt \\ &\leq C \sum_{j,l=0}^s \|f^{(l)}\|_\infty^2 \|\varphi^{(j)}\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Auf dem Raum der n -mal stetig differenzierbaren, 2π -periodischen Funktionen sind die Normen

$$\sum_{l=0}^n \|f^{(l)}\|_{\infty} \quad \text{und} \quad \|f\|_{\infty} + \|f^{(n)}\|_{\infty}$$

äquivalent. Somit gilt

$$\|f\varphi\|_{H^s}^2 \leq C (\|f\|_{\infty} + \|f^{(n)}\|_{\infty}) \sum_{j=0}^s \|\varphi^{(j)}\|_{L^2}^2 \stackrel{(i)}{\leq} \frac{C}{c_1} (\|f\|_{\infty} + \|f^{(n)}\|_{\infty}) \sum_{j=0}^s \|\varphi\|_{H^j}^2.$$

Aus der Definition der Sobolev-Räume ergibt sich $\|\varphi\|_{H^j} \leq \|\varphi\|_{H^s}$ für $j = 0, \dots, s$, woraus die gewünschte Abschätzung folgt.

(iii) Um die Aussage des Lemmas schließlich für beliebige $\varphi \in H^s$ zu erhalten, approximieren wir $\varphi \in H^s$ durch eine Folge trigonometrischer Polynome, nämlich der Folge der Partialsummen der zugehörigen Fourier-Reihe. Auf die Glieder der Folge kann Schritt (ii) angewandt werden. Im Grenzübergang ergibt sich die Abschätzung für φ . ■

Die Sobolev-Räume H^s bilden den Rahmen für das numerische Verfahren. Zur Herleitung von geeigneten Quadraturformeln werden wir Interpolation verwenden. Da wir es mit 2π -periodischen Funktionen zu tun haben, nutzen wir die Interpolation durch trigonometrische Polynome: Zu jedem 2π -periodischen $\varphi \in C(\mathbb{R})$ und zu $N \in \mathbb{N}$ existiert ein eindeutig bestimmtes trigonometrisches Polynom $P_N\varphi$ vom Grad höchstens N ,

$$P_N\varphi(t) = \sum_{j=-N}^N c_j e^{ijt}, \quad t \in \mathbb{R},$$

mit $c_N = c_{-N}$, so dass gilt

$$\varphi(t_j) = P_N\varphi(t_j), \quad j = 0, \dots, 2N - 1.$$

Hierbei verwenden wir die oben schon definierten Quadraturpunkte $t_j = -\pi + j\pi/N$, $j = 0, \dots, 2N - 1$. Hierbei ist P_N ein linearer Operator. Für einen Beweis der Lösbarkeit und der Linearität der Interpolationsaufgabe siehe zum Beispiel Kress, Numerical Analysis, 1998, Theorem 8.25.

Aus dem Abfallverhalten der Fourier-Koeffizienten folgt, dass für $\varphi \in H^s$ für $s > 1/2$ die Fourier-Reihe auf $[-\pi, \pi]$ gleichmäßig konvergiert. Somit ist ein solches φ stetig. Damit ist $P_N : H^s \rightarrow H^\sigma$ für $s > 1/2$ und jedes $0 \leq \sigma \leq s$ wohldefiniert. Es gilt folgende Konverenzaussage:

Satz 6.3 Für $s > 1/2$ und $0 \leq \sigma \leq s$ gilt für alle $\varphi \in H^s$

$$\|P_N \varphi - \varphi\|_{H^\sigma} \leq \frac{C}{N^{s-\sigma}} \|\varphi\|_{H^s}$$

mit einer Konstante C , die nur von σ und s abhängt.

Beweis:

(i) Vorüberlegungen: Wir schreiben $\varphi = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j T^{(j)}$ und $P_N \varphi(t) = \sum_{j=-N}^N c_j \tilde{T}^{(j)}$ mit $T^{(j)}(t) = e^{ijt}$, $t \in \mathbb{R}$, und erinnern an die Zusatzbedingung $c_N = c_{-N}$. Für festes $N \in \mathbb{N}$ können wir nun jedes $r \in \mathbb{Z}$ eindeutig zerlegen als

$$r = 2mN + l \quad \text{mit } m \in \mathbb{Z} \text{ und } -N < l \leq N.$$

Dies ist einfach die Division mit Rest von $r + N - 1$ durch $2N$.

Der Wert eines trigonometrischen Monoms $T^{(r)}$ in einem Interpolationspunkt t_j hängt nun nur von l und j ab:

$$T^{(r)}(t_j) = T^{(2mN+l)}(t_j) = e^{i(2mN+l)(-\pi + \frac{j\pi}{N})} = e^{i2\pi m(-N+j)} e^{il(-\pi + \frac{j\pi}{N})} = T^{(l)}(t_j)$$

für $r \in \mathbb{Z}$, $j = 0, \dots, 2N - 1$. Daher gilt wegen der eindeutigen Lösbarkeit der Interpolationsaufgabe

$$P_N T^{(r)} = P_N T^{(l)} = \begin{cases} T^{(l)}, & -N < l < N, \\ \frac{1}{2} (T^{(N)} + T^{(-N)}), & l = N, \end{cases} \quad r \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Alternative Definition von P_N und Nachweis der Abschätzung: Wir definieren nun einen Operator \tilde{P}_N , der φ auf ein trigonometrisches Polynom $\tilde{P}_N \varphi = \sum_{j=-N}^N c_j T^{(j)}$ abbildet durch explizite Angabe der c_j :

$$c_j = \begin{cases} \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{2mN+j}, & j = -N + 1, \dots, N - 1, \\ \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} (a_{(2m+1)N} + a_{(2m-1)N}), & j = \pm N. \end{cases}$$

Anmerkung: Es wird sich nachher ergeben, dass $\tilde{P}_N = P_N$ ist. Wäre schon gezeigt, dass $P_N : H^s \rightarrow L^2(-\pi, \pi)$ beschränkt ist, so würde sich die Formel für die c_j aus den Vorüberlegungen unmittelbar ergeben. Da wir aber noch nicht wissen, dass

P_N stetig ist, definieren wir \tilde{P}_N , zeigen, dass dieser Operator stetig ist und die behauptete Abschätzung erfüllt und schließlich, dass $\tilde{P}_N\varphi$ die Interpolationsaufgabe löst.

Im folgenden Konvergenz nehmen wir in allen Zwischenschritten die Konvergenz der Reihen an. Am Ende wird jeweils nachgewiesen, dass sie tatsächlich konvergieren. Formal sauberer sollte man erst mit Partialsummen arbeiten, dann ist aber alles noch komplizierter hinzuschreiben. Es gilt

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{P}_N\varphi - \varphi\|_{H^\sigma}^2 \\
&= \sum_{j=-N}^N (1+j^2)^\sigma |c_j - a_j|^2 + \sum_{|j|>N} (1+j^2)^\sigma |a_j|^2 \\
&= \sum_{j=-N+1}^{N-1} (1+j^2)^\sigma \left| \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} a_{2mN+j} \right|^2 \\
&\quad + (1+N^2)^\sigma \left(\left| a_N - \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{(2m+1)N} \right|^2 + \left| a_{-N} - \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{(2m-1)N} \right|^2 \right) \\
&\quad + \sum_{|j|>N} (1+j^2)^\sigma |a_j|^2.
\end{aligned}$$

Diese drei Summanden schätzen wir einzeln ab. Für den dritten gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{|j|>N} (1+j^2)^\sigma |a_j|^2 &= \sum_{|j|>N} (1+j^2)^{\sigma-s+s} |a_j|^2 \\
&\leq (1+N^2)^{\sigma-s} \sum_{|j|>N} (1+j^2)^s |a_j|^2 \leq (2N^2)^{\sigma-s} \|\varphi\|_{H^s}^2 = \frac{2^{\sigma-s}}{(N^{s-\sigma})^2} \|\varphi\|_{H^s}^2.
\end{aligned}$$

Beim ersten Summanden gilt mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung in ℓ^2

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=-N+1}^{N-1} (1+j^2)^\sigma \left| \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} a_{2mN+j} \right|^2 \\
&\leq \sum_{j=-N+1}^{N-1} (1+j^2)^\sigma \left(\sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{|2mN+j|^s}{((2|m|-1)N)^s} |a_{2mN+j}| \right)^2 \\
&\leq \sum_{j=-N+1}^{N-1} (1+j^2)^\sigma \left(\sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{((2|m|-1)N)^{2s}} \right) \left(\sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |2mN+j|^{2s} |a_{2mN+j}|^2 \right).
\end{aligned}$$

Die erste der Reihen über m konvergiert für $s > 1/2$ gegen einen Wert C/N^{2s} und wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{j=-N+1}^{N-1} (1+j^2)^\sigma \left| \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} a_{2mN+j} \right|^2 \\ \leq \frac{C}{N^{2s}} \sum_{j=-N+1}^{N-1} (1+j^2)^\sigma \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |2mN+j|^{2s} |a_{2mN+j}|^2. \end{aligned}$$

Mit

$$(1+j^2)^\sigma \leq (1+N^2)^\sigma \leq 2^\sigma N^{2\sigma}$$

folgt noch

$$\begin{aligned} \sum_{j=-N+1}^{N-1} (1+j^2)^\sigma \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |2mN+j|^{2s} |a_{2mN+j}|^2 \\ \leq 2^\sigma N^{2\sigma} \sum_{j=-N+1}^{N-1} \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |2mN+j|^{2s} |a_{2mN+j}|^2 \\ \leq 2^\sigma N^{2\sigma} \sum_{j=-N+1}^{N-1} \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |1+(2mN+j)^2|^s |a_{2mN+j}|^2 \\ \leq 2^\sigma N^{2\sigma} \|\varphi\|_{H^s}^2. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir für den ersten Summanden

$$\sum_{j=-N+1}^{N-1} (1+j^2)^\sigma \left| \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} a_{2mN+j} \right|^2 \leq \frac{C}{(N^{s-\sigma})^2} \|\varphi\|_{H^s}^2.$$

Ganz analog ergibt sich eine solche Abschätzung auch für den dritten Summanden. Somit folgt

$$\|\tilde{P}_N \varphi - \varphi\|_{H^\sigma}^2 \leq \frac{C}{(N^{s-\sigma})^2} \|\varphi\|_{H^s}^2.$$

Insbesondere ergibt sich für $\sigma = s$ mit der Dreiecksungleichung, dass \tilde{P}_N beschränkt ist.

(iii) Wir weisen noch nach, dass $P_N = \tilde{P}_N$ ist. Aus der Definition ergibt sich sofort

$$\tilde{P}_N T^{(r)}(t_j) = T^{(r)}(t_j), \quad r \in \mathbb{Z}, \quad j = 0, \dots, 2N-1.$$

Damit folgt aufgrund der Stetigkeit von \tilde{P}_N für $\varphi \in H^s$, $s > 1/2$, die Gleichheit

$$\tilde{P}_N \varphi(t_j) = \tilde{P}_N \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}} a_r T^{(r)} \right) (t_j) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} a_r \tilde{P}_N T^{(r)}(t_j) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} a_r T^{(r)}(t_j) = \varphi(t_j),$$

für $j = 0, \dots, 2N - 1$. Somit löst \tilde{P}_N die Interpolationsaufgabe, d.h. es gilt $\tilde{P}_N = P_N$. ■

Die Langrange-Basis $\{L_j^{(N)} : j = 0, \dots, 2N - 1\}$ für die trigonometrische Interpolation ist durch

$$\begin{aligned} L_j^{(N)}(t) &= \frac{1}{2N} \left(1 + 2 \sum_{l=1}^{N-1} \cos(l(t - t_j)) + \cos(N(t - t_j)) \right) \\ &= \frac{1}{2N} \sin(N(t - t_j)) \cos \frac{t - t_j}{2} \end{aligned}$$

gegeben, wobei die zweite Darstellung nur für $t \neq t_j$ gilt. Die Gleichheit beider Darstellungen werden wir gleich zu Beginn des Beweises von Lemma 6.4 nachweisen. An der ersten Darstellung erkennt man $L_j^{(N)}(t_j) = 1$, an der zweiten $L_j^{(N)}(t_r) = 0$ für $r \neq j$.

Wir bestimmen nun die approximativen Operatoren, indem wir die Integranden durch die zugehörigen trigonometrischen Interpolationspolynome ersetzen und die verbleibenden Integrale exakt berechnen. Dies entspricht genau dem Vorgehen bei der Herleitung etwa der Newton-Cotes Quadraturformeln, nur eben mit trigonometrischen statt mit gewöhnlichen Polynomen. Wir setzen

$$B_N \varphi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} P_N(K_2(t, \cdot) \varphi)(s) ds = \sum_{j=0}^{2N-1} K_2(t, t_j) \varphi(t_j) \int_{-\pi}^{\pi} L_j^{(N)}(s) ds.$$

Mit der ersten Darstellung der Langrange-Basisfunktionen oben können wir die verbleibenden Integrale sofort berechnen. Mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(l(s - t_j)) ds = 0, \quad j = 0, \dots, 2N - 1, \quad l = 1, \dots, N,$$

folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} L_j^{(N)}(s) ds = \frac{\pi}{N}.$$

Somit ist

$$B_N \varphi(t) = \frac{\pi}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} K_2(t, t_j) \varphi(t_j), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Dies entspricht gerade dem Ersetzen des Integrals in B durch die zusammengesetzte Trapezregel (bzw., da es sich um periodische Funktionen handelt, die zusammengesetzte Rechteckregel).

Zur Approximation des Operators A gehen wir analog vor, wobei wir die logarithmische Singularität aber exakt behandeln wollen und nur den glatten Teil des Integranden durch ein trigonometrisches Polynom ersetzen. Wir definieren also

$$\begin{aligned} A_N \varphi(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \log \left(4 \sin^2 \frac{t-s}{2} \right) P_N(K_1(t, \cdot) \varphi)(s) ds \\ &= \sum_{j=0}^{2N-1} K_1(t, t_j) \varphi(t_j) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \log \left(4 \sin^2 \frac{t-s}{2} \right) L_j^{(N)}(s) ds. \end{aligned}$$

Hier ist die Berechnung der verbleibenden Integrale komplizierter, lässt sich aber immer noch analytisch durchführen. Die zentrale Überlegung liefert das folgende Lemma.

Lemma 6.4 *Es gilt*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \log \left(4 \sin^2 \frac{t}{2} \right) e^{ijt} dt = \begin{cases} 0, & j = 0, \\ -\frac{1}{|j|}, & j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Beweis: Wir beginnen mit der Beobachtung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[(e^{ijt} - 1) \log \left(4 \sin^2 \frac{t}{2} \right) \right] &= i j e^{ijt} \log \left(4 \sin^2 \frac{t}{2} \right) + (e^{ijt} - 1) \frac{4 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} \\ &= i j e^{ijt} \log \left(4 \sin^2 \frac{t}{2} \right) + (e^{ijt} - 1) \cot \frac{t}{2} \end{aligned}$$

für $j \in \mathbb{N}$. Da die Kotangens-Funktion in 0 eine starke Singularität besitzt, ist zunächst unklar, ob die rechte Seite über $(-\pi, \pi)$ integrierbar ist. Es gilt aber für $t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ (und eine ganz ähnliche Rechnung liefert die zweite Darstellung

der Langrange-Basisfunktionen für die trigonometrische Interpolation),

$$\begin{aligned}
 (e^{ijt} - 1) \cot \frac{t}{2} &= i (e^{ijt} - 1) \frac{e^{it/2} + e^{-it/2}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} = i (1 - e^{ijt}) \frac{1 + e^{it}}{1 - e^{it}} \\
 &= i \frac{1 + e^{it} - e^{ijt} - e^{i(j+1)t}}{1 - e^{it}} \\
 &= i \frac{2(1 - e^{i(j+1)t}) - (1 - e^{it} + e^{ijt} - e^{i(j+1)t})}{1 - e^{it}} \\
 &= 2i \sum_{l=0}^j e^{ilt} - i(1 + e^{ijt}) = i \left(1 + 2 \sum_{l=1}^{j-1} e^{ilt} + e^{ijt} \right).
 \end{aligned}$$

Hieraus lässt sich die Integrierbarkeit des letzten Terms direkt ablesen, es gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} (e^{ijt} - 1) \cot \frac{t}{2} dt = 2\pi i.$$

Somit ist

$$ij \int_{-\pi}^{\pi} \log \left(4 \sin^2 \frac{t}{2} \right) e^{ijt} dt = \left[(e^{ijt} - 1) \log \left(4 \sin^2 \frac{t}{2} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} - 2\pi i = -2\pi i,$$

und es folgt die Behauptung für $j \in \mathbb{N}$. Für $j \in \mathbb{Z}_{<0}$ erhalten wir mit einer Substitution

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \log \left(4 \sin^2 \frac{t}{2} \right) e^{ijt} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \log \left(4 \sin^2 \frac{(-t)}{2} \right) e^{i(-j)t} dt = -\frac{1}{-j}.$$

Es fehlt noch der Fall $j = 0$. Elementare Umformungen liefern

$$\begin{aligned}
 2 \int_{-\pi}^{\pi} \log \left(4 \sin^2 \frac{t}{2} \right) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \log \left(4 \sin^2 \frac{t}{2} \right) dt + \int_{-\pi}^{\pi} \log \left(4 \cos^2 \frac{t}{2} \right) dt \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \log \left(16 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \log (4 \sin^2 t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-2\pi}^{2\pi} \log \left(4 \sin^2 \frac{\tau}{2} \right) d\tau = \int_{\pi}^{\pi} \log \left(4 \sin^2 \frac{\tau}{2} \right) d\tau.
 \end{aligned}$$

Somit ist

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \left(4 \sin^2 \frac{t}{2} \right) dt = 0,$$

was zu zeigen war. ■

Satz 6.5 *Der Integraloperator $A_0 : C([- \pi, \pi]) \rightarrow C([- \pi, \pi])$ mit*

$$A_0 \varphi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \log \left(4 \sin^2 \frac{t-s}{2} \right) \varphi(s) ds, \quad t \in [-\pi, \pi],$$

hat die Eigenfunktionen e^{ijt} , $j \in \mathbb{Z}$ mit zugehörigen Eigenwerten

$$\lambda_j = \begin{cases} 0, & j = 0, \\ -\frac{1}{|j|}, & j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Ferner gilt für $j = 0, \dots, 2N-1$

$$w_j^{(1)}(t) = A_0 L_j^{(N)}(t) = -\frac{1}{N} \left(\sum_{l=1}^{N-1} \frac{1}{l} \cos(l(t-t_j)) + \frac{1}{2N} \cos(N(t-t_j)) \right).$$

Beweis: Nach Lemma 6.4 gilt für $T^{(j)}(t) = e^{ijt}$, $j \in \mathbb{Z}$,

$$A_0 T^{(j)}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \log \left(4 \sin^2 \frac{t-s}{2} \right) e^{-ij(t-s)} dt e^{ijt} = \lambda_j T^{(j)}(t).$$

Indem wir die erste Darstellung der Lagrange-Basisfunktionen umschreiben,

$$\begin{aligned} L_j^{(N)}(t) &= \frac{1}{2N} \left(1 + \sum_{l=1}^{N-1} \cos(l(t-t_j)) + \cos(N(t-t_j)) \right) \\ &= \frac{1}{2N} \left(1 + \sum_{l=1}^{N-1} [e^{il(t-t_j)} e^{-il(t-t_j)}] + \frac{1}{2} [e^{iN(t-t_j)} + e^{-iN(t-t_j)}] \right) \\ &= \frac{1}{2N} \left(\frac{1}{2} T^{(-N)}(t-t_j) + \sum_{l=1-N}^{N-1} T^{(l)}(t-t_j) + \frac{1}{2} T^{(N)}(t-t_j) \right), \end{aligned}$$

erhalten wir die Darstellung der $w_j^{(1)}$ direkt aus der Eigenwerteigenschaft der $T^{(l)}$.

■

Kommentar: Um die Matrix des linearen Gleichungssystems (6.3) aufzustellen, müssen die Werte $w_j^{(1)}(t_l)$, $j, l = 0, \dots, 2N-1$, bestimmt werden. Für den Aufwand hierfür ist die Beobachtung wichtig, dass diese Größen allein von der Differenz $j-l$ abhängen.

Somit ist nun die erste der zu Beginn gestellten Fragen, nach der Wahl der $w_j^{(1/2)}$, beantwortet. Wir gehen nun die beiden verbleibenden Fragen nach der Konvergenz und Stabilität des Verfahrens an.

Satz 6.6 Für $p > \frac{1}{2}$ sind $A, A_N : H^p \rightarrow H^{p+1}$ beschränkt. Ist $0 \leq q \leq p$, so gilt

$$\|(A - A_N)\varphi\|_{H^{q+1}} \leq C N^{q-p} \|\varphi\|_{H^p}$$

für alle $\varphi \in H^p$. Insbesondere konvergiert also (A_N) in $\mathcal{L}(H^p, H^{q+1})$ gegen A für jedes $q < p$.

Beweis: Für festes $t \in [-\pi, \pi]$ bestimmen wir die Fourier-Koeffizienten $K^{(m)}(t)$ der 2π -periodischen Funktion $K_1(t, \cdot)$,

$$K^{(m)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_1(t, s) e^{-ims} ds, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Da $K_1(t, \cdot)$ beliebig oft stetig differenzierbar ist, können wir partiell integrieren, und erhalten

$$\begin{aligned} K^{(m)}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_1(t, s) \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^j \left[\left(\frac{1}{-im}\right)^j e^{-ims} \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(im)^j} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^j K_1(t, s) \right] e^{-ims} ds \end{aligned}$$

für jedes $j \in \mathbb{N}_0$. Multiplizieren wir mit $(im)^j$ durch, so stehen rechts wieder die Fourier-Koeffizienten einer L^2 -Funktion, d.h. $((im)^j K^{(m)}(t))$ ist eine Folge in ℓ^2 . Nutzen wir noch die Periodizität und Stetigkeit von $K^{(m)}$, so folgt

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}} |m|^j \|K^{(m)}\|_{\infty} < \infty$$

für alle $j \in \mathbb{N}_0$.

Da K_1 beliebig oft stetig differenzierbar ist, gilt dies auch für die $K^{(m)}$. Somit können wir dieselbe Überlegung für jede partielle Ableitung von $K^{(m)}$ durchführen und erhalten

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}} |m|^j \left\| \frac{d^l}{dt^l} K^{(m)} \right\|_{\infty} < \infty$$

für alle $j, l \in \mathbb{N}_0$.

Als nächstes halten wir fest, dass A_0 für jedes $p \geq 0$ stetig zu einem Operator von H^p nach H^{p+1} fortgesetzt werden kann. Ist nämlich $\varphi \in H^p$ mit Fourier-Darstellung $\varphi = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j T^{(j)}$, betrachten wir für $M \in \mathbb{N}$ die Partialsummen

$$\varphi_M = \sum_{j=-M}^M a_j T^{(j)}.$$

Es folgt mit Satz 6.5

$$\begin{aligned} \|A_0 \varphi_M\|_{H^{p+1}}^2 &= \left\| \sum_{j=-M}^M a_j A_0 T^{(j)} \right\|_{H^{p+1}}^2 = \left\| \sum_{j=-M}^M a_j \lambda_j T^{(j)} \right\|_{H^{p+1}}^2 \\ &= \sum_{\substack{j=-M \\ j \neq 0}}^M (1+j^2)^{p+1} \frac{1}{j^2} |a_j|^2 \leq \sum_{\substack{j=-M \\ j \neq 0}}^M (1+j^2)^p |a_j|^2 \leq \|\varphi\|_{H^p}^2. \end{aligned}$$

Wir können nun Linearität und Stetigkeit von A_0 ausnutzen und erhalten für $\varphi \in H^p$

$$A\varphi = A_0(K_1(\cdot, \cdot)\varphi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} K^{(m)} A_0(T^{(m)}\varphi).$$

Für jedes $l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq p+1$ erhalten wir mit Lemma 6.2 und der Beschränktheit von A_0 die Abschätzung

$$\|A\varphi\|_{H^{p+1}} \leq C \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\|K^{(m)}\|_{\infty} + \left\| \frac{d^l}{dt^l} K^{(m)} \right\|_{\infty} \right) \|T^{(m)}\varphi\|_{H^p}.$$

Eine weitere Anwendung von Lemma 6.2 ergibt die Abschätzung

$$\|T^{(m)}\varphi\|_{H^p} \leq C |m|^l \|\varphi\|_{H^p}.$$

Somit folgt

$$\|A\varphi\|_{H^{p+1}} \leq C \sum_{m \in \mathbb{Z}} |m|^l \left(\|K^{(m)}\|_{\infty} + \left\| \frac{d^l}{dt^l} K^{(m)} \right\|_{\infty} \right) \|\varphi\|_{H^p}.$$

Die Konvergenz der Reihe ist hierbei durch die Überlegungen zu den Fourier-Koeffizienten $K^{(m)}$ sichergestellt. Somit ist $A \in \mathcal{L}(H^p, H^{p+1})$ bewiesen.

Für den Operator A_N zeigt man ganz analog die Darstellung

$$A_N \varphi = \sum_{m \in \mathbb{Z}} K^{(m)} A_0 P_N(T^{(m)} \varphi).$$

Somit ist

$$(A - A_N) \varphi = \sum_{m \in \mathbb{Z}} K^{(m)} A_0 (T^{(m)} \varphi - P_N(T^{(m)} \varphi)).$$

Mit analogen Abschätzungen wie oben und Satz 6.3 ergibt sich

$$\|(A - A_N) \varphi\|_{H^{q+1}} \leq C \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\|K^{(m)}\|_{\infty} + \left\| \frac{d^l}{dt^l} K^{(m)} \right\|_{\infty} \right) N^{q-p} \|T^{(m)} \varphi\|_{H^p}.$$

Hieraus ergibt sich die gewünscht Abschätzung. Die Beschränktheit von A_N folgt nun aus der von A und $A - A_N$ und der Dreiecksungleichung. ■

Bemerkung 6.7 Die Aussagen von Satz 6.6 gelten ganz analog für B und B_N . Der Beweis ist noch etwas einfacher, da A_0 durch die Identität ersetzt werden kann.

◀

Damit ist auch die zweite unserer Fragen geklärt. Es bleibt die dritte zur Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems zu beantworten. Wir erhalten hierbei mit wenig Aufwand auch eine Konvergenzaussage für unser Verfahren.

Satz 6.8 Ist $p \geq 1$, so gilt $\|A - A_N\|_{\mathcal{L}(H^p)}, \|B - B_N\|_{\mathcal{L}(H^p)} \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$. Ist N hinreichend groß, so ist $I - A_N - B_N$ invertierbar und es existiert eine Konstante $C(p)$ mit

$$\|(I - A_N - B_N)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^p)} \leq C(p)$$

für alle N . Ist $\psi \in H^p$ und sind φ, φ_N die Lösungen der Gleichungen $(I - A - B)\varphi = \psi$ bzw. $(I - A_N - B_N)\varphi_N = \psi$, so gilt

$$\|\varphi - \varphi_N\|_{L^2(-\pi, \pi)} \leq C N^{-p} \|\varphi\|_{H^p}.$$

Beweis: Wenden wir Satz 6.6 mit $q = p - 1$ an, so erhalten wir die Abschätzung

$$\|(A - A_N) \varphi\|_{H^p} \leq \frac{C}{N} \|\varphi\|_{H^p},$$

und daher $A_N \rightarrow A$ in $\mathcal{L}(H^p)$. Analoges gilt für B_N, B nach Bemerkung 6.7.

Den Rest des Satzes erhalten wir mit recht allgemeinen Überlegungen aus der Funktionalanalysis. Sind X, Y Banach-Räume und sind $G, H \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $G^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ und

$$\|G^{-1}(G - H)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1,$$

so folgt aus dem Satz über die Neumann'sche Reihe, dass der Operator $I - G^{-1}(G - H)$ beschränkt invertierbar ist. Ferner gilt die Abschätzung

$$\|(I - G^{-1}(G - H))^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{1 - \|G^{-1}(G - H)\|_{\mathcal{L}(X)}}.$$

Da $I - G^{-1}(G - H) = G^{-1}H$ ist, ist auch H invertierbar mit

$$\|H^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \leq \frac{\|G^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X)}}{1 - \|G^{-1}(G - H)\|_{\mathcal{L}(X)}}.$$

Für $y \in Y$ und Lösungen $x, \tilde{x} \in X$ von $Gx = y$ bzw. $H\tilde{x} = y$ gilt

$$H(\tilde{x} - x) = y - Hx = (G - H)x$$

und daher

$$\|\tilde{x} - x\|_X \leq \|H^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \|(G - H)x\|_Y.$$

Diese Überlegungen wenden wir nun für $X = Y = H^p$ und $G = I - A - B$ sowie $H = I - A_N - B_N$ an. Die Invertierbarkeit von G hatten wir in Satz 4.16 gezeigt. Die Abschätzung für $G^{-1}(G - H)$ folgt aus der Normkonvergenz von $A_N + B_N$ gegen $A + B$ für hinreichend großes N . Somit ist für ein solches N auch $I - A_N - B_N$ invertierbar mit

$$\|(I - A_N - B_N)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^p)} \leq \frac{\|(I - A - B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^p)}}{1 - \|(I - A - B)^{-1}(A - A_N + B - B_N)\|_{\mathcal{L}(H^p)}}.$$

Der Nenner ist hierbei natürlich nach unten beschränkt, woraus sich die Stabilität des Verfahrens ergibt. Da die approximative Gleichung $(I - A_N - B_N)\varphi_N = \psi$ zum LGS 6.3 äquivalent ist, folgt auch die Lösbarkeit von 6.3 für hinreichend großes N .

Für die Konvergenzaussage wählen wir $X = Y = H^1$. Dann ergibt sich mit Satz 6.6 und Bemerkung 6.7

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi_N\|_{L^2(-\pi, \pi)} &\leq \|\varphi - \varphi_N\|_{H^1} \\ &\leq \|(I - A_N - B_N)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^1)} \|(A - A_N + B - B_N)\varphi\|_{H^1} \leq C N^{-p} \|\varphi\|_{H^p}. \end{aligned}$$

■

Kommentar: Da für $K_j \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ die Zahl p beliebig groß gewählt werden kann, ist für die erreichbare Konvergenzordnung einzig die Glattheit von ψ entscheidend. Ist auch $\psi \in H^p$ für jedes $p \in \mathbb{R}_{>0}$, so wird jede algebraische Konvergenzordnung N^{-p} erreicht. Für ein Streuproblem mit einem Streuer mit C^∞ -glattem Rand ist dies der Fall. Daher ist die Nyström-Methode für die Anwendung auf Streuprobleme sehr gut geeignet.