Aufgabenblatt 2 zur Vorlesung

Variationsrechnung

WS 2006/2007

Prof. Dr. Andreas Kirsch

Institut für Algebra und Geometrie
Universität Karlsruhe (TH)

Aufgabe 4: Gegeben seien $x_a, x_b \in \mathbb{R}_{>0}$. Betrachten Sie die folgenden Variationsprobleme: Minimiere $J(x)$ auf der Menge $A := \big\{x \in \mathbf{C}^1[a,b] : x(a) = x_a,\ x(b) = x_b\big\}$ für die Funktionale $J = J_1$ und $J = J_2$, wobei

$$J_1(x) \;=\; \int_a^b \big[x(t)^2 + \dot{x}(t)^2\big]\, dt$$

und

$$J_2(x) \;=\; \int_a^b x(t)\,\sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}\, dt\,.$$

Berechnen Sie mit den Eulergleichungen (in integrierter Form) die (einzig möglichen) Kandidaten für die Lösungen.

Aufgabe 5: Die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der nichtlinearen Gleichung

$$2x \;+\; y \;+\; e^{xy} \;=\; 1$$

enthält den Punkt $(x, y) = (0, 0)$. Zeigen Sie, dass es für alle x aus einer Umgebung von $x = 0$ genau eine Lösung $y(x)$ der Gleichung gibt mit $y(0) = 0$ und so, dass y zweimal stetig differerenzierbar nach x ist. Stellen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von y um den Punkt $x = 0$ auf. (Hinweis: Satz über die Implizite Funktion!)