Dynamik der gKB: die Zentripetalkraft

Eine Kraft, egal welcher Natur, die einen Körper auf eine kreisförmige Laufbahn zwingt, nennt man **Zentripetalkraft**.
Das 2.Newtonsche Gesetz (Grundgleichung der Mechanik) für die Zentripetalkaft $\overrightarrow{F}_z$ hat die Form:

$$\overrightarrow{F}_z = m\overrightarrow{a}_z$$

Die **Zentripetalbeschleunigung** $\overrightarrow{a}_z$ wird durch den Grenzwert

$$\overrightarrow{a}_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{v}}{\Delta t}$$

gegeben.
Wir betrachten das Zeitintervall $[t_0; t_1]$ mit $t_0 = 0$ (der Körper befindet sich im oberen Punkt, s. Abbildung 1 links), $t_1 = t$ und $\overrightarrow{v}_0 = \overrightarrow{v}(0)$ bzw. $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{v}(t)$.

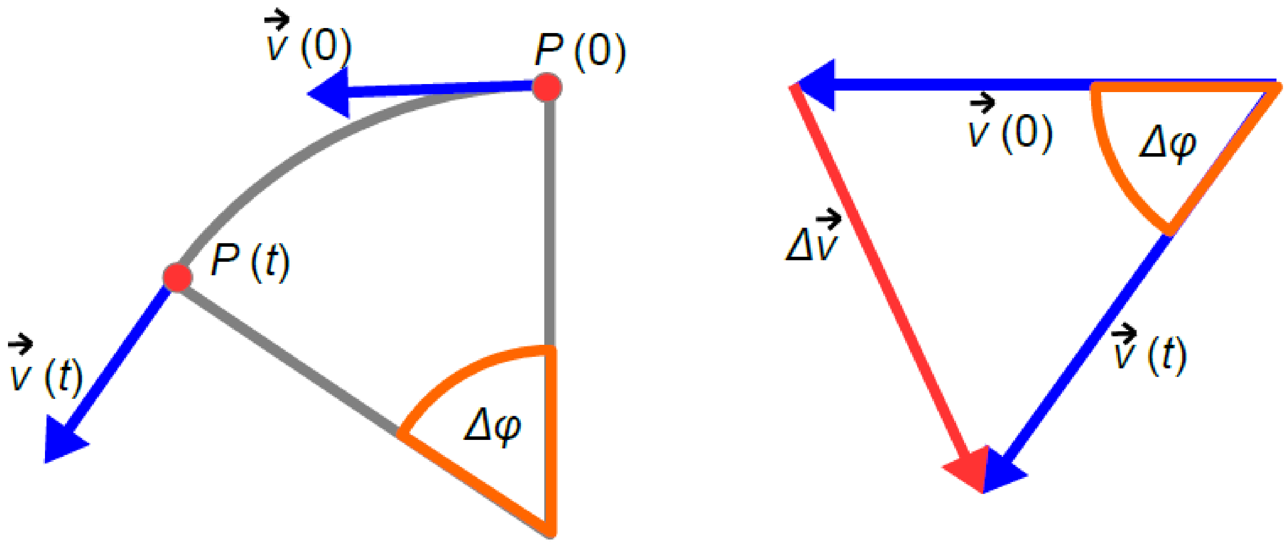


Abb. 1: die LB und die Geschwindigkeitsvektoren (links) / $\Delta\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(t) - \overrightarrow{v}(0)$ (rechts)

Die Vektorendifferenz $\Delta\overrightarrow{v}$ wird durch den roten Vektor dargestellt, s. Abb. 1 rechts (vergrößert).

Wir bestimmen, der Reihe nach, den Betrag und die Richtung der Zentripetalbeschleunigung $\overrightarrow{a}_z$.

1. Betrag: Vektoren $\overrightarrow{v}_0 = \overrightarrow{v}(0)$ und $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{v}(t)$ haben den gleichen Betrag $v_0 = v_1 = v$, denn die Bahngeschwindigkeit bleibt bei einer gleichförmigen Bewegung die ganze Zeit über konstant. Die beiden Vektoren schließen einen Winkel $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t = \omega \cdot t$ ein, s. Abb. 1 rechts. Hier ist ω die Winkelgeschwindigkeit.
Die in der Abbildung 2 eingezeichnete Höhe durch die Spitze $P(0)$ teilt das gleichschenklige Dreieck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke.

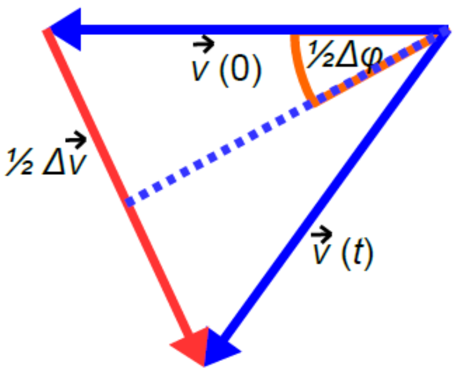


Abb. 2: Hilfskonstruktion

Betrachten wir nun das Obere Dreieck.
Es hat die Hypotenuse $v_0 = v$ und den Winkel $\frac{1}{2}\Delta\varphi$ an $P\,(0)$.

Die gegenüber liegende Kathete hat die Länge $\frac{1}{2}\Delta v$.

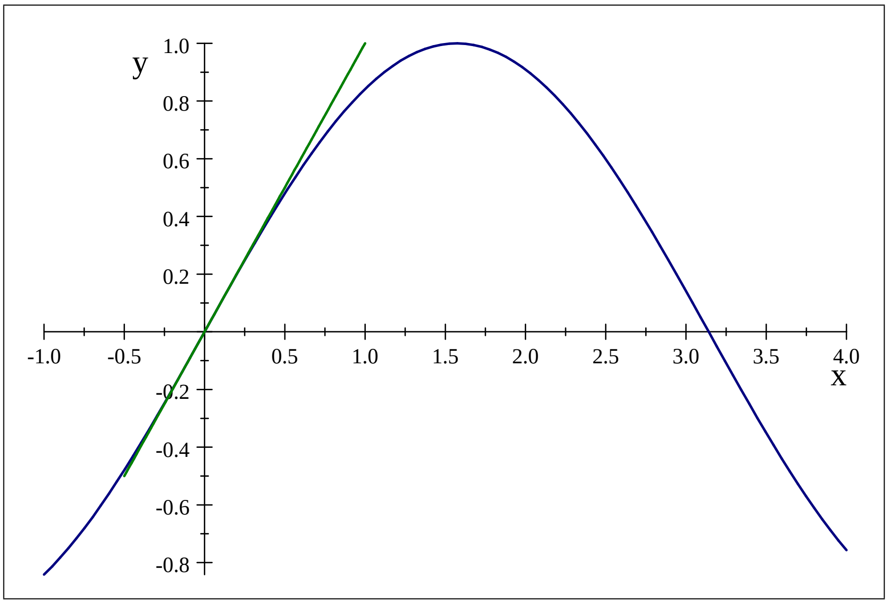
Def. von Sinus: $\dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)$.

Also gilt: $\frac{1}{2}\Delta v = v \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi\right)$ oder
$\Delta v = 2v \cdot \sin\left(\dfrac{1}{2}\Delta\varphi\right) = 2v \cdot \sin\left(\dfrac{1}{2}\omega t\right)$.

Der Grenzübergang liefert:

$$a_z = \lim_{t\to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{t\to 0} \frac{2v \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\omega t\right)}{t}.$$

Aus dem Mathematikunterricht soll bekannt sein, dass $\sin(x) \approx x$ ist für kleine x-Werte ($\sin'(0) = 1$), vgl. die Graphen von $\sin(x)$ (blau) und x (grün): $\sin(x)$



Also ist $\sin\left(\dfrac{1}{2}\omega t\right) \approx \dfrac{1}{2}\omega t$ und folglich

$$a_z = \lim_{t\to 0} \frac{2v \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\omega t\right)}{t} = 2v \cdot \frac{1}{2}\omega = v\omega.$$

Je nachdem, welche Größen gegeben sind, kann man auf eine der folgenden äquivalenten Formeln für den Betrag der Zentripetalbeschleunigung zugreifen:

$$a_z = v\omega = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = (2\pi\ f)^2\, R \quad \text{bzw.}$$

$$F_z = mv\omega = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = m\,(2\pi\ f)^2\, R$$

2. Richtung der Zentripetalbeschleunigung:

Der Vektor $\Delta\vec{v}$ schließt mit der Vertikalen einen Winkel von $\frac{1}{2}\Delta\varphi$. Die gleiche Richtung hat natürlich auch der Quotient $\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$.

Bei dem Grenzübergang für $\Delta t \to 0$ strebt der Winkel $\frac{1}{2}\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$ gegen 0. Deswegen steht der Vektor $\vec{a}_z$ senkrecht auf $\vec{v}_0$ und ist zum Mitelpunkt der Kreislaufbahn gerichtet.

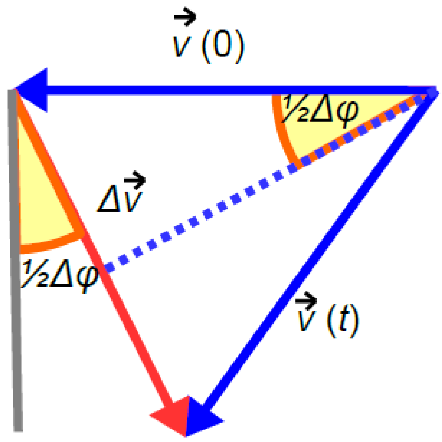


Abb. 3: Richtung von $\Delta\vec{v}$