AB1: Geraden im Raum: Geradengleichungen

- LS180-183
- SchulLV → BW → Gymnasium → Klassenstufe 11 oder 12 → Digitales Schulbuch → Analytische Geometrie → Geraden →

→ Geraden: Spickzettel + Lernviedeos + Aufgaben
https://www.schullv.de/mathe/basiswissen/analytische_geometrie/analytische_geo/geraden#aufgaben

→ Punktprobe: Spickzettel + Lernviedeos
https://www.schullv.de/mathe/basiswissen/analytische_geometrie/analytische_geo/geraden_punkt

→ Geraden im Raum: Spickzettel + Aufgaben

https://www.schullv.de/mathe/basiswissen/analytische_geometrie/analytische_geo/geraden_raum#aufgaben

→ Vermischte Aufgaben 1, 2, 3, 4a:
https://www.schullv.de/mathe/basiswissen/analytische_geometrie/analytische_geo/geraden_vermischte_aufg

Ein bisschen Theorie

Analytische Gometrie ist ein Gebiet der Mathematik, wo man geometrische Objekte, wie Punkte, Strecken, Geraden, Ebenen, Figuren und Körper mithilfe von Zehlenverhältnissen untesucht.
Hierfür arbeitet man mit Koordinaten statt mit Punkten. In einem Koordinatensystem wird jedem Punkt in Raum $\mathbb{R}^3$ **eindeutig** ein Zahlentripel zugeordnet. Umgekehrt, jedem Zahlentripel entspricht ein einziger Punkt in $\mathbb{R}^3$. Wir beschränken uns auf kartesische Koordinatensysteme, die für die Untersuchung metrischer Verhältnisse, d.h. Streckenlängen und Winkelgrößen, am besten geeignet sind.

Zum guten Ton gehört in der Mathematik die Einhaltung bestimmter Vereinbarunden bezüglich der Notationen. Für gewöhnlich verwendet man als Namen für gegebene Punkte einer Figur Grossbuchstaben von Beginn des Alphabets an: A, B, C, D, ... (z. B. Dreieck ABC, das Parallelogramm $ABCD$); ihre Koordinaten werden mit den gleichnahmigen Kleinbuchstaben bezeichnet, etwa

$$A\,(a_1|a_2|a_3)\,,\ B\,(b_1|b_2|b_3)\,,\ ...$$

Mit P bezeichnet man üblicherweise einen laufenden Punkt im Raum, über denn man irgendwelche allgemeine Aussagen macht: P spielt in analytischer Geometrie die Rolle einer Variablen. Seine Koordinaten werden mit den Variablen $(x_1|x_2|x_3)$ (oft auch $(x|y|z)$) belegt. Selbstverständlich ist auch die Bezeichnung $P\,(p_1|p_2|p_3)$ möglich. Die Zahlentripel wird $(x_1|x_2|x_3)$ auch dem Punkt mit dem Namen X zugeordnet.

Braucht man weitere Punkte als Variablen, so nimmt man die Grossbuchstaben Q, R, ... , X, Y, Z.

Punkte, die durch Konstruktionen aus den gegebenen Punkten A, B, ... hervorgehen, bezeichnet man mit den Buchstaben aus dem Mittelfeld des Alphabets, oft passend zu der jeweiligen Konstruktion. So wird beispielsweise für den Mittelpunkt einer Strecke der Buchstabe M verwendet, für einen Lotfusspunkt hat sich ein H etabliert (kommt von *Höhen*fusspunkt in einem Dreieck) u.s.w.

Grundsätzlich gilt: Je treffender die Bezeichnung, desto verständlicher der Text. So ist beispielsweise ein S für die Spitze einer Pyramide ein passender Name, als Eckpunkt im Quadrat $ABSD$ bedarf es besondere Gründe. Gibt es keinen speziellen Grund, warum eine Bezeichnung "aus der Reihe tanzen" soll, soll ein Quadrat lieber $ABCD$ heißen.

Der sogenannte Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ oder $\overrightarrow{OX}$ der den Koordinatenursprung $O\,(0|0|0)$ mit P bzw. X verbindet, wird als Spalte $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ geschrieben und mit $\overrightarrow{p}$ bzw. $\overrightarrow{x}$ bezeichnet. Der Verbindungvektor $\overrightarrow{AB}$ von A nach B kann als Differenz

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \text{ (Kontrolle durch Addition: } \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\text{)}$$

berechnet werden. Somit ist $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$.

Nun zurück zum Thema Geraden, die überigens für gewöhnlich mit g, h, i, j, k, ... bezeichnet werden. Durch zwei verschiedene Punkte A und B in $\mathbb{R}^3$ kann man eine einzige Gerade $g = (AB)$ ziehen. Wir suchen nach einer Gleichung, die alle Punkte $X \in (AB)$ erfüllen. Man kann vom Ursprung O über dem Streckenzug OAX zu einem laufenden Punkt X kommen:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX}.$$

Da die Punkte A, B und X kollinear sind (d.h. auf einer Geraden liegen), ist der Vektor $\overrightarrow{AX}$ ein Vielfaches von $\overrightarrow{AB}$. Es gibt also eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ für die gilt

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\ \overrightarrow{AB}. \qquad ((1))$$

Umgekehrt, gelte für ein X die Gleichung (1), so liegt X auf der Geraden (AB) . Somit beschreibt die Gleichung (1) genau die Gerade g. Mit den Abkürzungen $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$ (sogenannter **Stützvektor**) und $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ (**Richtungsvektor**) erhält man eine **Geradengleichung** für g:

$$g : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + t\ \overrightarrow{u},$$

hier ist $t \in (-\infty; \infty)$ ein frei wählbarer Parameter.

Es werden folgende Grundfragen im Zusammenhang mit Geraden gestellt:

1. Wie lautet eine Geradengleichung für g gegeben durch zwei Punkte A und B, s. oben;
2. Wie lautet eine Geradengleichung für g gegeben durch einen Punkt A und einen Richtungsvektor $\overrightarrow{u}$:
3. Liegt ein Punkt C auf der gegebenen Geraden g (Variante: sind Punkte A, B und C kollinear)?
4. Bei kollinearen Punkten A, B und C : liegt B zwischen A und C?
   - Falls ja, im welchen Verhältnis teilt B die Strecke AC;
5. Wie lauten die Koordinaten eines Punktes C, der die Strecke AB in einem bestimmten Verhältnis teilt.

Diese und weitere Fragen werden wir diese Woche der Reihe nach durchnehmen.