Vorbereitung auf das Abitur 2020: Lineare Substitution beim Integrieren

- Klausur 3, PT A2
- LS86-89
- SchulLV → BW → Gymnasium → Klassenstufe 11 oder 12 → Digitales Schulbuch → Analysis → Integralrechnung →
  - Stammfunktion: Spickzettel + Aufgaben
    https://www.schullv.de/mathe/basiswissen/analysis/integral/stammfunktionen#aufgaben
    + Lernvideo
  - Lernvideos zu linearen Substitution, Beispiel 1 und Beispiel 2
    https://www.schullv.de/mathe/basiswissen/analysis/integral/lineare_substitution#lernvideos
  - Vermischte Aufgaben:
    https://www.schullv.de/mathe/basiswissen/analysis/integral/vermischte_aufgaben

Ein bisschen Theorie: Die Funktion f_1, deren Term durch

$$f_1(x) = c\ f(ax+b)$$

gegeben wird, nennt man linear substituierte Funktion f. Ist F eine Stammfunktion zu f, so ist

$$F_1(x) = \frac{c}{a}\ F(ax+b)$$

eine Stammfunktion zu f_1 (eine, weil man zu einer SF natürlich auch noch eine beliebige reelle Zahl addieren kann: Die Summe ist ebenso eine SF).

Ein Paar Beispiele:

"Baustein"-Funktion f	Stammfunktion F	linear substituierte Funktion f_1	Stammfunktion F_1 zu f_1 (ohne $+C$)
x^3	$\frac{1}{4}x^4$	$2(5x-7)$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}(5x-7)^4 = \frac{1}{10}(5x-7)^4$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$2\ \sin(3x+\pi)$	$\frac{2}{3}\cdot(-\cos(3x+\pi)) = -\frac{2}{3}\ \cos(3x+\pi)$
$\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}} = x^{-\frac{5}{4}}$	$-4\ x^{-\frac{1}{4}}$	$\frac{7}{\sqrt[4]{(4-3x)^5}}$	$\frac{7}{-3}\cdot\left(-4(4-3x)^{-\frac{1}{4}}\right) = \frac{28}{3\sqrt[4]{4-3x}}$
e^x	e^x	$0,5\ e^{-2x+1}$	$\frac{0,5}{-2}\ e^{-2x+1} = -0,25\ e^{-2x+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|)$	$\frac{7}{4-3x}$	$\frac{7}{-3}\ \ln(\|4-3x\|) = -\frac{7}{3}\ \ln(\|4-3x\|)$

Aufgabenblatt (Lösung auf der nächsten Seite)

"Baustein"-Funktion f	Stammfunktion F	linear substituierte Funktion f_1	Stammfunktion F_1 zu f_1 (ohne $+C$)
x^5		$18\ (4x-5)$	
$\sin(x)$		$-3\ \sin(2x-\pi)$	
$\cos(x)$		$5\ \sin(\pi x-1)$	
$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=x^{-\frac{2}{3}}$		$\frac{7}{\sqrt[3]{(2-5x)^2}}$	
e^x		$0,2\ e^{-0,4x-0,1}$	
$\frac{1}{x},\ x>0$		$\frac{3}{1-2x},\ x<\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{x},\ x<0$		$\frac{3}{1-2x},\ x>\frac{1}{2}$	
3^x		3^{10x-2}	
$\frac{1}{\sqrt{x^3}}=x^{-\frac{3}{2}}$		$\frac{10}{\sqrt{(1-4x)^3}}$	

Lösung zu den Aufgaben (kann als Faltblatt benutzt werden)

"Baustein"-Funktion f	Stammfunktion F	linear substituierte Funktion f_1	Stammfunktion F_1 zu f_1 (ohne $+C$)
x^5	$\frac{1}{6}x^6$	$18\ (4x-5)$	$\frac{18}{4}\cdot\frac{1}{6}(4x-5)^6 = \frac{3}{4}(4x-5)^6$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$-3\ \sin(2x-\pi)$	$\frac{-3}{2}\cdot(-\cos(2x-\pi)) = \frac{3}{2}\ \cos(2x-\pi)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$5\ \sin(\pi x-1)$	$\frac{5}{\pi}\ \cos(\pi x-1)$
$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-\frac{2}{3}}$	$3\ x^{\frac{1}{3}}$	$\frac{7}{\sqrt[3]{(2-5x)^2}}$	$\frac{7}{-5}\cdot 3(2-5x)^{\frac{1}{3}} = -\frac{21}{5\ \sqrt[3]{2-5x}}$
e^x	e^x	$0,2\ e^{-0,4x-0,1}$	$\frac{0,2}{-0,4}\ e^{-0,4x-0,1} = -0,5\ e^{-0,4x-0,1}$
$\frac{1}{x},\ x>0$	$\ln(x)$	$\frac{3}{1-2x},\ x<\frac{1}{2}$	$\frac{3}{-2}\ \ln(1-2x) = -1,5\ \ln(1-2x)$
$\frac{1}{x},\ x<0$	$\ln(-x)$	$\frac{3}{1-2x},\ x>\frac{1}{2}$	$\frac{3}{-2}\ \ln(2x-1) = -1,5\ \ln(2x-1)$
3^x	$\frac{3^x}{\ln(3)}$	3^{10x-2}	$\frac{1}{10}\cdot\frac{3^{10x-2}}{\ln(3)} = \frac{3^{10x-2}}{10\cdot\ln(3)}$
$\frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}}$	$-2\ x^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{10}{\sqrt{(1-4x)^3}}$	$\frac{10}{-4}\cdot\left(-2\ (1-4x)^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{5}{\sqrt{1-4x}}$