Vorbereitung auf das Abitur 2020: Graphentransformationen

- Klausur 3, **Aufgabe A3a+b**)
- LS135-138
- SchulLV → BW → Gymnasium → Klassenstufe 11 oder 12 → Digitales Schulbuch → Analysis → Schaubilder von Funktionen →
  - Trigonometrische Funktionen: Spickzettel + Lernvideos + Aufgaben *https://www.schullv.de/mathe/basiswissen/analysis/graph/trigonometrische_funktionen#aufgaben*
  - Exponentialfunktionen: Spickzettel + Lernvideos + Aufgaben *https://www.schullv.de/mathe/basiswissen/analysis/graph/exponentialfunktionen#aufgaben*
  - Logarithmusfunktionen: Spickzettel + Lernvideos + Aufgaben *https://www.schullv.de/mathe/basiswissen/analysis/graph/logarithmusfunktionen#aufgaben*
  - Wurzelfunktionen: Spickzettel + Lernvideos + Aufgaben *https://www.schullv.de/mathe/basiswissen/analysis/graph/wurzelfunktionen#aufgaben*
- Allerlei Erklärvideos auf youtube, wie z.B.
  - https://www.youtube.com/watch?v=XK4EOocG29g#action=share (von SchulLV)
  - https://www.youtube.com/watch?v=QcGybY0Yw-A
  - https://www.youtube.com/watch?v=5EXjUy6Ptdw
  - https://www.youtube.com/watch?v=gohbi1sHCKcs

Ein bisschen Theorie:

- Substituiert man in einem Funktionsterm f die Variable x durch $x - a$:

$$f_{neu}(x) = f_{alt}(x - a),$$

so bewirkt das eine $x-$Verschiebung des Graphen um a LE ($a > 0$ nach rechts, $a < 0$ nach links). In Fig. 1 ist die Ausgangsfunktion f_{alt} mit $f(x) = x^2$, die substituierte $f_{neu}(x) = (x-1)^2$ (blaues Schaubild).

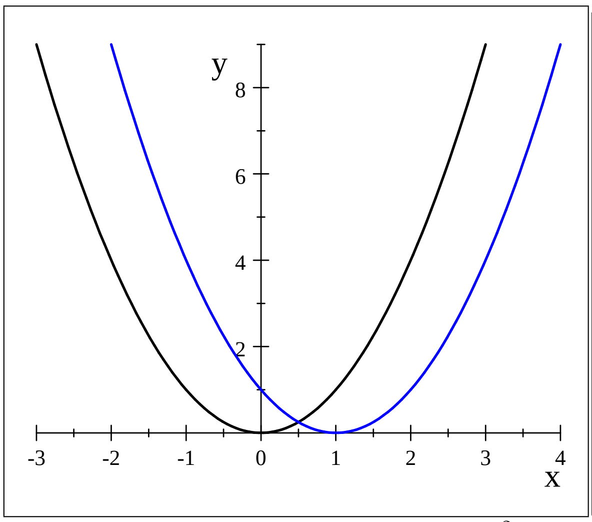


Fig. 1a: $x-$ Verschiebung von x^2

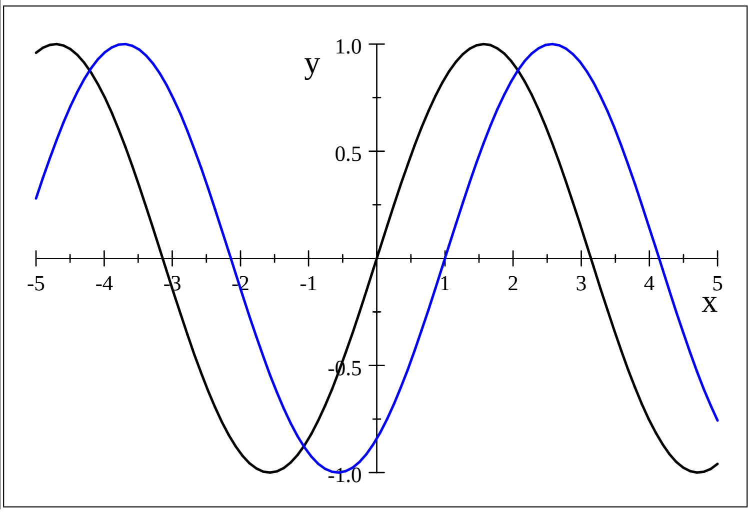


Fig. 1b: $f_{blau} = \sin(x-1)$

Substituiert man in einem Funktionsterm f die Variable x durch $\frac{x}{\lambda}$, $\lambda > 0$,

$$f_{neu}(x) = f_{alt}\left(\frac{x}{\lambda}\right),$$

so bewirkt das eine $x-$Streckung des Graphen mit dem Streckfaktor λ ($\lambda < 1$: der Graph wird zu der $y-$Achse gestaucht, $\lambda > 1$: der Graph wird von der $y-$Achse gestreckt). In Fig. 2 ist die Ausgangsfunktion f_{alt} mit $f(x) = (x-1)^2$ (blau, verschoben um 1 LE nach rechts), die substituierte $f_{neu}(x) = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$ (grün, gestreckt mit dem Faktor 2 von der $y-$Achse).

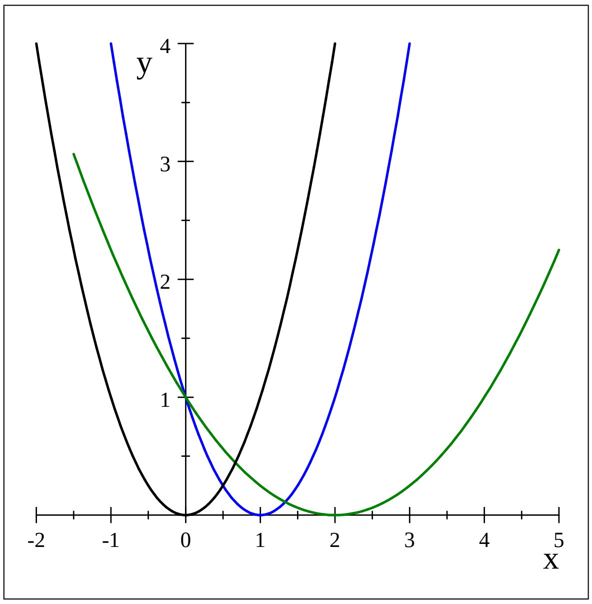


Fig. 2: zuerst Verschiebung, dann Streckung

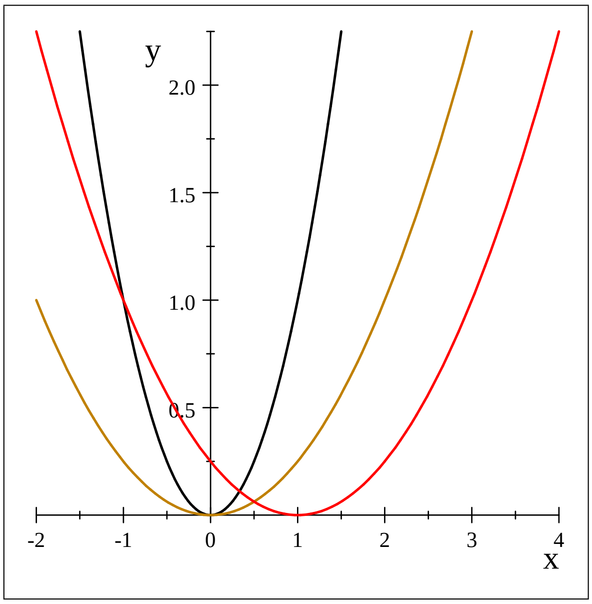


Fig. 3: zuerst Streckung, dann Verschiebung

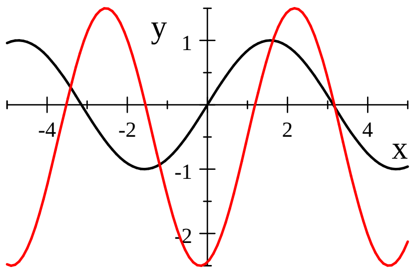
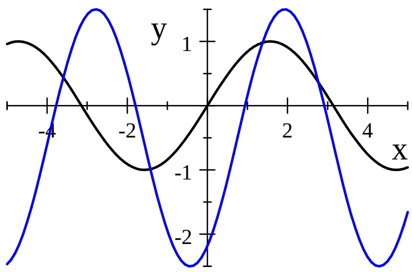
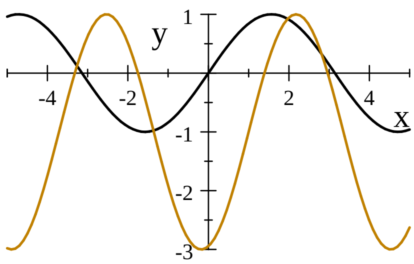
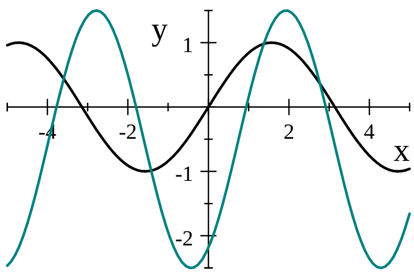
Wenn man die Reihenfolge der Substitutionen umkehrt, also erst x durch $\frac{x}{\lambda}$, dann im neuen Funktionsterm x durch $x - a$ ersetz, so wird der Graph erst gestreckt und dann verschoben. Das ergibt einen anderen Graphen bzw. einen anderen Funktionsterm. In Fig. 3 wird x in $f_0(x) = x^2$ (schwarzer Graph) erst durch $\frac{x}{2}$ ersetzt: $f_1(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ (braun) und dann durch $x - 1$ im Funktionsterm f_1. Es ergibt sich $f_2(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2$ (rot).

Ähnliches bewirkt die Substitution von $y - b$ anstelle von y : $f_{neu}(x) = f_{alt}(x) + b$ (entspricht in symmetrischer Schreibweise $y_{neu} - b = y_{alt}$) bewirkt eine $y-$Verschiebung um b LE.

Eine Substitution von $\frac{y}{\mu}$ anstelle von y : $\frac{f_{neu}(x)}{\mu} = f_{alt}(x)$ (entspricht in symmetrischer Schreibweise $y_{neu} = \mu \cdot y_{alt}$) beweirkt eine $y-$Streckung mit dem Streckfaktor μ.

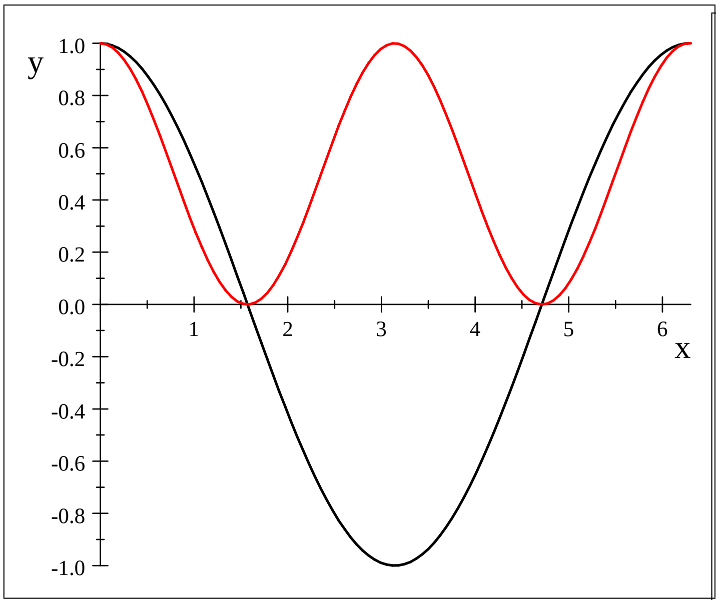
Ein Paar Beispiele für die Ausgangsfuktion

$$f_{alt}\left(x\right)=\sin\left(x\right)\ \text{ mit } a=1,\ \ \lambda=0.75,\ \ b=-0.5,\mu=2:$$

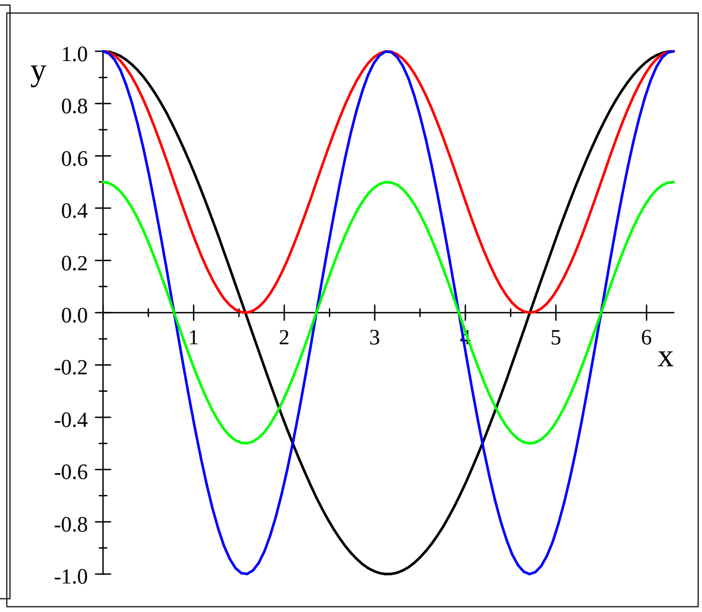
Funktionsterm	Reihenfolge, x	Reihenfolge, y	Graph
$f_{neu}\left(x\right)=\mu\ f_{alt}\left(\frac{x-a}{\lambda}\right)+b$ symmetrische Schreibweise: $\frac{y_{neu}-b}{\mu}=f_{alt}\left(\frac{x-a}{\lambda}\right)$	zuerst Streckung, dann Verschiebung	zuerst Streckung, dann Verschiebung	 $2\cdot\sin\left(\frac{x-1}{0.75}\right)-0.5$
$f_{neu}\left(x\right)=\mu\ f_{alt}\left(\frac{x}{\lambda}-a\right)+b$ symmetrische Schreibweise: $\frac{y_{neu}-b}{\mu}=f_{alt}\left(\frac{x}{\lambda}-a\right)$	zuerst Verschiebung, dann Streckung	zuerst Streckung, dann Verschiebung	 $2\cdot\sin\left(\frac{x}{0.75}-1\right)-0.5$
$f_{neu}\left(x\right)=\mu\ \left(f_{alt}\left(\frac{x-a}{\lambda}\right)+b\right)$ symmetrische Schreibweise: $\frac{y_{neu}-b}{\mu}=f_{alt}\left(\frac{x-a}{\lambda}\right)$	zuerst Streckung, dann Verschiebung	zuerst Verschiebung, dann Streckung	 $2\cdot\left(\sin\left(\frac{x-1}{0.75}\right)-0.5\right)$
$f_{neu}\left(x\right)=\mu\ \left(f_{alt}\left(\frac{x}{\lambda}-a\right)+b\right)$ symmetrische Schreibweise: $\frac{y_{neu}}{\mu}-b=f_{alt}\left(\frac{x}{\lambda}-a\right)$	zuerst Verschiebung, dann Streckung	zuerst Verschiebung, dann Streckung	 $2\cdot\left(\sin\left(\frac{x}{0.75}-1\right)-0.5\right)$

Zurück zur Klausuraufgabe A3. Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = (\cos(x))^2$. Skizzieren Sie den Graphen Γ_g auf dem Intervall $I = [0; \pi]$. Bestimmen Sie die Koordinaten sämtlicher Hoch- sowie Tiefpunkte von Γ_g auf I. Es gibt Zahlen a, b, c, so dass gilt: $g(x) = a\cos(bx) + c$. Bestimmen Sie diese Zahlen.

Lösung: Aus dem Vergleich der Graphen Γ_0 für $f_0(x) = \cos(x)$ und Γ_1 für $f_{end}(x) = \cos^2(x)$ (rot)



$\cos(x)$ (scharz) und $\cos^2(x)$ (rot)



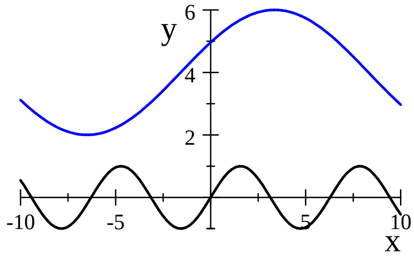
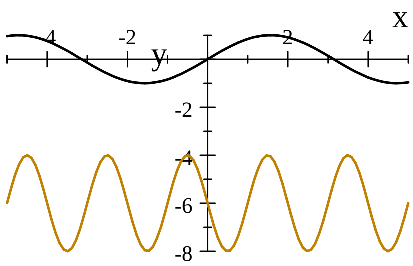
Alle Zwischenschritte

folgt, wie Γ_1 aus Γ_0 hervorgeht: Der schwarze Graph wurde zur $y-$Achse gestaucht (gestreckt mit dem Streckfaktor 0,5), dann zur $y-$Achse gestaucht (gestreckt mit dem Streckfaktor $\frac{1}{2}$), anschließend um $0,5$ LE nach oben verschoben. Daraus ergibt sich die Reihenfolge der Funktionsterme

$$f_0(x) = \underbrace{\cos(x)}_{schwarz} \to f_1(x) = \underbrace{\cos(2x)}_{blau} \to f_2(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\cos(2x)}_{grün} \to f_3(x) = \boxed{f_{\text{end}} = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}}.$$

bitte wenden

Aufgaben

Funktionsterm	Reihenfolge, x	Reihenfolge, y	Graph
$f_{neu}(x) = 3\sin\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1$			
$f_{neu}(x) = 2\sin(\qquad) + 4$	zuerst Verschiebung um 0,5 LE dann Streckung mit dem Faktor π		
$f_{neu}(x) = ?\,(\sin(\pi(x-1)) + ?)$		zuerst Verschiebung um -3 LE, dann Streckung mit dem Faktor 2	
$f_{neu}(x) =$	zuerst Verschiebung um 0,2 LE, dann Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{\pi}$	zuerst Verschiebung um 2 LE, dann Streckung mit dem Faktor 1,5.