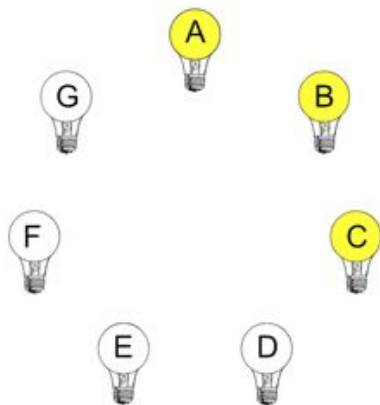




Beim Exponat „Sieben Lampen“ sind sieben Lampen in einem Kreis angeordnet, an jeder Lampe befindet sich ein Schalter. Die Aufgabe ist es nun, mit möglichst wenig Schalterbetätigungen alle Lampen anzuschalten. Der Clou: Ein Schalter ändert nicht nur den Status der eigenen Lampe, sondern auch den der rechten und linken Nachbarlampe. Für unterschiedliche Anfangskonfigurationen kann am Modell geknobbelt werden!



Um das 7-Lampen-Problem mathematisch zu lösen, muss dieses zunächst in mathematische Schreibweise überführt werden. Die Anfangskonfiguration der Lampen kann als Vektor mit sieben Einträgen geschrieben werden ( $\vec{v}_A$ =Vektor Anfang), die jeweils den Wert 1 ('Lampe ist an') oder den Wert 0 ('Lampe ist aus') annehmen können. Der Zielzustand ( $\vec{v}_E$ =Vektor Ende) ist wenn alle Lampen an sind. Die Anfangs-Konfiguration, die links zu sehen ist, sieht aus Vektor folgendermaßen aus:

$$\vec{v}_A = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Um sich nun zu überlegen, wie man von einer beliebigen Anfangskonfiguration zum Endzustand gelangt, benötigt man die Addition im Körper  $\mathbb{F}_2$ . Es gibt nur die Elemente 0 und 1. Die Rechenregeln sind:

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 0$$

Nun kann das Drücken eines Schalters als eine Addition in  $\mathbb{F}_2$  aufgefasst werden: Drückt man den Schalter an Lampe A, so ändert sich der Zustand von Lampe A, B und G (A selbst und die beiden Nachbarn). Das entspricht also der Addition des Anfangsvektors mit dem Vektor, der zum Schalter gehört:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Allgemein kann das für alle Schalter folgendermaßen aufgeschrieben werden ( $x_i$  ist jeweils die Anzahl, wie häufig der jeweilige Schalter gedrückt wird):

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{pmatrix} + x_A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_D \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_E \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_F \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_G \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In Matrixschreibweise ergibt sich folgendes LGS (wobei der Anfangszustand direkt auf die rechte Seite zum Endzustand geschrieben wurde):

$$\left( \begin{array}{ccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1-A \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-B \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1-C \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1-D \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1-E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1-F \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1-G \end{array} \right)$$

Dieses Gleichungssystem ist unabhängig von der Anfangskonfiguration der Lampen lösbar! Das heißt, egal welche Lampen zu Beginn an oder aus sind, ist es möglich, alle zum Leuchten zu bringen!

## Offene Fragen:

- ▶ Wie sieht es bei anderen Lampenanzahlen aus?
- ▶ Ist die Reihenfolge, in der die Schalter gedrückt werden relevant?

Die Antworten auf diese Fragen kannst du bei uns im Labor oder speziell bei einem Workshop zu den sieben Lampen erfahren!

Probiere auch gerne im Voraus schon das Sieben-Lampen-Problem online mit GeoGebra aus: <https://www.geogebra.org/m/dxesxcnz>.