Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
PD. Dr. Dieter Kadelka · Daniel Gentner

Asymptotische Stochastik (SS 2010)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (Arten von Konvergenz reeller Zufallsvariablen und deren Zusammenhänge)
Es seien $X, X_n, n \in \mathbb{N}$ reelle Zufallsvariablen. Zeigen Sie die eingezeichneten Zusammenhänge, d.h. zeigen Sie die Implikation bei nicht durchgestrichenen Pfeilen und finden Sie Gegenbeispiele für durchgestrichene Pfeile:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{X_n \xrightarrow{f.s.} X} \arrow[rr, shift left, "/" marking] \arrow[dr, shift left] & & \boxed{X_n \xrightarrow{L^p} X} \arrow[ll, shift left, "/" marking] \arrow[dl, shift left] \\
& \boxed{X_n \xrightarrow{P} X} \arrow[ul, shift left, "/" marking] \arrow[ur, shift left, "/" marking] \arrow[d, shift left] & \\
& \boxed{X_n \xrightarrow{d} X} \arrow[u, shift left, "/" marking] &
\end{tikzcd}$$

Aufgabe 2 (Satz von Polya)
Seien $X, X_1, X_2, ...$ Zufallsvariablen mit zugehörigen Verteilungsfunktionen $F, F_1, F_2, ...$ F sei stetig. Zeigen Sie:

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \Leftrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Aufgabe 3 (Exponentialverteilung als schwacher Grenzwert)
Seien $X_1, X_2, ... \sim U(0,1)$ u.i.v. Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

(a) $n \min_{1 \le j \le n} X_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{Exp}(1)$,

(b) $n(1 - \max_{1 \le j \le n} X_j) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{Exp}(1)$.

Seien nun $Y_1, Y_2, ...$ u.i.v. Zufallsvariablen mit invertierbarer Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie

(c) $n(1 - F(\max_{1 \le j \le n} Y_j)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathrm{Exp}(1)$.

Aufgabe 4 (Schwache Konvergenz als Werkzeug)
Die *Euler–Mascheroni Konstante* γ wird wie folgt definiert

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = \int_1^\infty \left(\frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x} \right) dx \simeq 0,5772156649...$$

Sie spielt in verschiedensten Bereichen der Zahlentheorie und Analysis eine Rolle. Interessanterweise ist nicht einmal bekannt, ob γ rational ist. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass

$$\int_0^\infty [1 - \exp(-e^{-x})] dx = \gamma.$$

Zeigen Sie dazu zunächst, dass für u.i.v. $X_1, X_2, ... \sim \mathrm{Exp}(1)$ Zufallsvariablen gilt, dass

$$\max_{1\le j\le n} X_j - \ln(n) \xrightarrow{\mathcal{D}} X,$$

wobei X die Verteilungsfunktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(-e^{-x})$ besitzt, und setzen Sie diese Information gewinnbringend ein. Im Weiteren wird es nützlich sein, zu zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i-1} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Betrachten Sie dazu die erzeugende Funktion der linken Seite

$$f(x) := \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i-1} \frac{x^i}{i},$$

bzw. deren Ableitung.