Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
PD. Dr. Dieter Kadelka · Daniel Gentner

Asymptotische Stochastik (SS 2010)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (Arten von Konvergenz reeller Zufallsvariablen und deren Zusammenhänge)
Es seien $X, X_n, n \in \mathbb{N}$ reelle Zufallsvariablen. Zeigen Sie die eingezeichneten Zusammenhänge, d.h. zeigen Sie die Implikation bei nicht durchgestrichenen Pfeilen und finden Sie Gegenbeispiele für durchgestrichene Pfeile:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{X_n \xrightarrow{f.s.} X} \arrow[rr, shift left, "/" marking] \arrow[dr, shift left] & & \boxed{X_n \xrightarrow{L^p} X} \arrow[ll, shift left, "/" marking] \arrow[dl, shift left] \\
& \boxed{X_n \xrightarrow{P} X} \arrow[ul, shift left, "/" marking] \arrow[ur, shift left, "/" marking] \arrow[d, shift right] & \\
& \boxed{X_n \xrightarrow{d} X} \arrow[u, shift right, "/" marking] &
\end{tikzcd}$$

Lösung: Betrachte $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) := ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda^1|_{[0,1]})$ und $X_n := n\mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n})}$, $X := 0$. Dann gilt $X_n \to X$ f.s., jedoch

$$\mathbb{E}|X_n - X|^p = n^{p-1} \not\to 0.$$

Dies liefert auch ein Gegenbeispiel, weshalb aus Konvergenz in Wahrscheinlichkeit nicht die Konvergenz in L^p folgt, denn es ist für $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \leq \frac{1}{n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Ein Gegenbeispiel weshalb aus Konvergenz in L^p nicht fast sichere Konvergenz folgt, liefert $X_n := \mathbf{1}_{[j \cdot 2^{-k}, (j+1) \cdot 2^{-k}]}$ für $n = j + 2^k, 0 \leq j < 2^k, k \in \mathbb{N}_0$ und $X := 0$. Hier gilt

$$\mathbb{E}|X_n - X|^p = 2^{-k}, \quad (0 < p < \infty)$$

und also $X_n \to X$ in L^p. Offensichtlich konvergiert X_n jedoch nirgendwo punktweise. Dies liefert auch ein Gegenbeispiel, weshalb aus Konvergenz in Wahrscheinlichkeit nicht fast-sichere Konvergenz folgt, denn es ist

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 2^{-k} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Es konvergiere nun $X_n \to X$ fast sicher. Dann folgt

$$\mathbb{P}(\sup_{k \geq n} |X_k - X| > \epsilon) \to 0, \quad n \to \infty,$$

und wegen $\{|X_n - X| > \epsilon\} \subset \{\sup_{k\geq n} |X_k - X| > \epsilon\}$ die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit.
Konvergiert statt dessen $X_n \to X$ in L^p für ein $p > 0$, so liefert für $\epsilon > 0$ die Markov-Ungleichung

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|X_n - X|^p}{\epsilon^p},$$

die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit.
Gelte nun $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$. Es gilt für $t \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$ die Inklusion

$$\{X \leq t - \epsilon\} \subset \{|X_n - X| \geq \epsilon\} \cup \{X_n \leq t\}$$

(Fallunterscheidung nach X_n), was dann für die Verteilungsfunktionen

$$F(t - \epsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) + F_n(t)$$

nach sich zieht. Die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit impliziert

$$F(t - \epsilon) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(t).$$

Analog impliziert die Inklusion

$$\{X_n \leq t\} \subset \{|X_n - X| \geq \epsilon\} \cup \{X \leq t + \epsilon\}$$

(Fallunterscheidung nach X) dann

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(t) \leq F(t + \epsilon).$$

Für $t \in \mathcal{C}(F)$ liefert $\epsilon \to 0$ nun $\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t)$, und damit $X_n \overset{\mathcal{D}}{\to} X$.
Für ein Gegenbeispiel, weshalb die umgekehrte Implikation unzulässig ist, sei $X \sim \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ und

$$X_n := 1 - X.$$

Trivialerweise $X_n \overset{\mathcal{D}}{\to} X$, jedoch gilt für $0 < \epsilon < 1$ dann

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = \mathbb{P}(1 \geq \epsilon) = 1 \not\to 0, \quad n \to \infty.$$

Aufgabe 2 (Satz von Polya)
Seien $X, X_1, X_2, ...$ Zufallsvariablen mit zugehörigen Verteilungsfunktionen $F, F_1, F_2, ...$ F sei stetig. Zeigen Sie:

$$X_n \overset{\mathcal{D}}{\to} X \Leftrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Lösung:
Die Implikation von rechts nach links ist trivial. Gelte also $X_n \overset{\mathcal{D}}{\to} X$, was wegen der Stetigkeit von F die punktweise Konvergenz

$$F_n(x) \to F(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

nach sich zieht. Um die Gleichmäßigkeit dieser Konvergenz nachzuweisen, sei $\epsilon > 0$. Wir wählen ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{N} < \epsilon$. Da F stetig ist, existieren (nicht notwendig eindeutig bestimmte) Stellen t_k mit

$$F(t_k) = \frac{k}{N}, \quad k = 1, ..., N - 1.$$

Da es sich hier nur um endlich viele Stellen handelt, können wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ wählen mit

$$|F_n(t_k) - F(t_k)| \le \epsilon, \quad k = 1, ..., N-1, \quad n \ge n_0.$$

Sei nun $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt entweder $-\infty < x \le t_1$, $t_{N-1} \le x < \infty$ oder es gibt ein k mit $t_k \le x \le t_{k+1}$. Wir behandeln nur den letzten Fall, die beiden ersten behandelt man völlig analog. Gelte also $t_k \le x \le t_{k+1}$ für ein k. Dann folgt auf Grund der Monotonie der jeweiligen Funktionen

$$F_n(x) - F(x) \ge F_n(t_k) - F(t_{k+1}) \ge F_n(t_k) - F(t_k) + F(t_k) - F(t_{k+1}) \ge -\epsilon - \frac{1}{N}, \quad n \ge n_0$$
$$F_n(x) - F(x) \le F_n(t_{k+1}) - F(t_k) \le F_n(t_{k+1}) - F(t_{k+1}) + F(t_{k+1}) - F(t_k) \le \epsilon + \frac{1}{N}, \quad n \ge n_0.$$

Es folgt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \le \epsilon + \frac{1}{N} \le 2\epsilon.$$

Aufgabe 3 (Exponentialverteilung als schwacher Grenzwert)
Seien $X_1, X_2, ... \sim U(0,1)$ u.i.v. Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

(a) $n \min_{1 \le j \le n} X_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Exp}(1)$,

(b) $n(1 - \max_{1 \le j \le n} X_j) \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Exp}(1)$.

Seien nun $Y_1, Y_2, ...$ u.i.v. Zufallsvariablen mit invertierbarer Verteilungsfunktion F. Zeigen Sie

(c) $n(1 - F(\max_{1 \le j \le n} Y_j)) \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Exp}(1)$.

Lösung:

(a) Es gilt für $0 < x < n$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(n \min_{1 \le j \le n} X_j \le x) &= \mathbb{P}(\exists 1 \le j \le n : X_j \le x/n) = 1 - \mathbb{P}(X_j > x/n, j = 1, ..., n) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x/n)^n = 1 - (1 - \mathbb{P}(X_1 \le x/n))^n \\ &= 1 - (1 - \frac{x}{n})^n \to 1 - e^{-x}, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Es ist klar, dass diese Konvergenz dann auch für alle $x \in [0, \infty)$ gilt.

(b) Es gilt für $0 < x < n$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(n(1 - \max_{1 \le j \le n} X_j) \le x) &= \mathbb{P}(\max_{1 \le j \le n} X_j \ge 1 - x/n) = 1 - \mathbb{P}(\max_{1 \le j \le n} X_j < 1 - x/n) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 < 1 - x/n)^n = 1 - (1 - x/n)^n \\ &\to 1 - e^{-x}, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Es ist klar, dass diese Konvergenz dann auch für alle $x \in [0, \infty)$ gilt.

(c) Es gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(n(1-F(\max_{1\le j\le n} Y_j)) \le x) &= \mathbb{P}(F(\max_{1\le j\le n} X_j) \ge 1-x/n) = 1-\mathbb{P}(F(\max_{1\le j\le n} X_j) < 1-x/n)\\ &= 1-\mathbb{P}(\max_{1\le j\le n} X_j < F^{-1}(1-x/n)) = 1-\mathbb{P}(X_1 < F^{-1}(1-x/n))^n\\ &= 1-(F(F^{-1}(1-x/n)))^n\\ &= 1-(1-x/n)^n \to 1-e^{-x}, \quad n\to\infty.\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Schwache Konvergenz als Werkzeug)
Die *Euler–Mascheroni Konstante* γ wird wie folgt definiert

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = \int_1^\infty \left(\frac{1}{\lfloor x \rfloor} - \frac{1}{x}\right) dx \simeq 0,5772156649...$$

Sie spielt in verschiedensten Bereichen der Zahlentheorie und Analysis eine Rolle. Interessanterweise ist nicht einmal bekannt, ob γ rational ist. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass

$$\int_0^\infty [1-\exp(-e^{-x})]dx = \gamma.$$

Zeigen Sie dazu zunächst, dass für u.i.v. $X_1, X_2, ... \sim \mathrm{Exp}(1)$ Zufallsvariablen gilt, dass

$$\max_{1\le j\le n} X_j - \ln(n) \xrightarrow{\mathcal{D}} X,$$

wobei X die Verteilungsfunktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(-e^{-x})$ besitzt, und setzen Sie diese Information gewinnbringend ein. Im Weiteren wird es nützlich sein, zu zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i-1} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Betrachten Sie dazu die erzeugende Funktion der linken Seite

$$f(x) := \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i-1} \frac{x^i}{i},$$

bzw. deren Ableitung.

Lösung: Zunächst gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{(n)} - \ln n \le x) &= \mathbb{P}(\max\{X_1, \cdots, X_n\} \le x + \ln n) = \mathbb{P}(X_i \le x + \ln n, i \in \{1, ..., n\})\\ &= (1-e^{-(x+\ln n)})^n = (1-\frac{e^{-x}}{n})^n \to e^{-e^{-x}}.\end{aligned}$$

Das Integral kann also wie folgt geschrieben werden:

$$\int_0^\infty [1-\exp(-e^{-x})]dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_{(n)} - \ln n > x)dx.$$

Hier ist

$$\mathbb{P}(X_{(n)} - \ln n > x) = 1 - (1 - \frac{e^{-x}}{n})^n,$$

monoton fallend in n, weshalb wir wie folgt nach oben abschätzen können:

$$\mathbb{P}(X_{(n)} - \ln n > x) \leq 1 - (1 - \frac{e^{-x}}{1})^1 = e^{-x},$$

Nun ist $\int_0^\infty e^{-x}dx = 1 < \infty$, weshalb wir den Satz von der dominierten Konvergenz verwenden können, um Limes und Integration zu vertauschen:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty [1 - \exp(-e^{-x})]dx &= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \mathbb{P}(X_{(n)} - \ln n > x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_{(n)} - \ln n]. \end{aligned}$$

Den Erwartungswert berechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{(n)}] &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X_{(n)} > x)dx = \int_0^\infty 1 - \mathbb{P}(X_{(n)} \leq x)dx \\ &= \int_0^\infty 1 - \mathbb{P}(X_1, ..., X_n \leq x)dx = \int_0^\infty 1 - (1 - e^{-x})^n dx \\ &= \int_0^\infty 1 - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-e^{-x})^i dx \\ &= -\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^i \int_0^\infty e^{-ix} dx \\ &= \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^{i-1} \frac{1}{i}. \end{aligned}$$

Wir beweisen im Folgenden, dass diese Reihe gleich $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ ist. Die erzeugende Funktion der obigen Reihe ist

$$f(x) := \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^{i-1} \frac{x^i}{i},$$

und für deren Ableitung ergibt sich

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^{i-1} x^i = \frac{-1}{x} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-x)^i = \frac{1 - (1-x)^n}{1 - (1-x)} \\ &= 1 + (1-x) + (1-x)^2 + ... + (1-x)^{n-1}. \end{aligned}$$

Integration von 0 bis x liefert

$$f(x) - f(0) = x - \frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(1-x)^3}{3} - ... - \frac{(1-x)^n}{n} + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n},$$

und also

$$f(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}.$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$\int_0^\infty [1 - \exp(-e^{-x})]dx = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n \right] = \gamma.$$