Institut für Stochastik
PD. Dr. Dieter Kadelka · Daniel Gentner

Asymptotische Stochastik (SS 2010)

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (Schwache Konvergenz in abzählbaren diskreten Räumen)
Zeigen Sie für einen abzählbaren diskreten topologischen Raum S, dass eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen P_n auf S genau dann schwach gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf S konvergiert, falls

$$P_n(\{x\}) \to P(\{x\}), \quad x \in S.$$

Beweisen sie weiterhin, dass in diesem Fall

$$\sup_{A \in \mathcal{S}} |P_n(A) - P(A)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

(P_n konvergiert also gegen P in der Variationsmetrik.)

Aufgabe 2 (Satz von Scheffé)
Seien P_n, P Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem metrischen Raum E, gegeben durch Dichten p_n, p bzgl. eines (nicht notwendig endlichen) Maßes λ auf E.

(a) Zeigen Sie, dass aus $p_n \to p$ λ-f.ü. folgt dass

$$\sup_{A \in \mathcal{E}} \left| \int_A p d\lambda - \int_A p_n d\lambda \right| = \frac{1}{2} \int |p - p_n| d\lambda \to 0.$$

(b) Folgern Sie, dass aus $p_n \to p$ λ-f.ü. folgt dass $P_n \xrightarrow{d} P$.

(c) Geben Sie ein Beispiel, das klar macht, weshalb die Umkehrung in (b) nicht gültig ist.

Aufgabe 3 (Rechenregel zur schwachen Konvergenz)
Seien X_n, Y_n, X Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass aus $X_n \xrightarrow{d} X$ und $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$ folgt, dass $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + a$ und $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{d} X \cdot a$.

Aufgabe 4 (Rund um gleichgradige Integrierbarkeit)
Geben Sie Beispiele von Zufallsvariablen X_n, X, so dass

(a) $X_n \xrightarrow{d} X$, X_n integrierbar, X nicht,

(b) $X_n \xrightarrow{d} X$, X_n nicht integrierbar, X integrierbar

(c) $X_n \xrightarrow{d} X$, X_n, X integrierbar mit $\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X$, jedoch $\{X_n\}$ nicht gleichgradig integrierbar.

Aufgabe 5 (Anwendung des Abbildungssatzes)
Sei $P = \lambda|_{[0,1]}$ und $P_n := \sum_{i=1}^n \delta_{\xi_i^n}$ mit $\xi_i^n \in (\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})$. Zeigen Sie, dass $P_n \xrightarrow{d} P$, und folgern Sie, dass jede beschränkte fast überall stetige Funktion Riemann-integrierbar ist.