Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
PD. Dr. Dieter Kadelka · Daniel Gentner

Asymptotische Stochastik (SS 2010)

Lösungen zu Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (Schwache Konvergenz in abzählbaren diskreten Räumen)
Zeigen Sie für einen abzählbaren diskreten topologischen Raum S, dass eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen P_n auf S genau dann schwach gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf S konvergiert, falls

$$P_n(\{x\}) \to P(\{x\}), \quad x \in S.$$

Beweisen sie weiterhin, dass in diesem Fall

$$\sup_{A \in \mathcal{S}} |P_n(A) - P(A)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

(P_n konvergiert also gegen P in der Variationsmetrik.)

Lösung: Die betrachtete Topologie auf S ist die diskrete, d.h. jede einpunktige Menge $\{x\}, x \in S$ ist offen, bzw. jede (!) Teilmenge von S ist offen. Damit ist auch jede Abbildung $f : S \to \mathbb{R}$ stetig. Konvergiert nun P_n schwach gegen P, so haben wir nach Definition

$$\int f dP_n \to \int f dP, \quad f \in \mathcal{C}_b(E).$$

Da jede Abbildung $f : S \to \mathbb{R}$ stetig ist, können wir für f auch die (beschränkten) Indikatorfunktionen $y \mapsto \mathbf{1}_{\{x\}}(y)$ wählen, und wir erhalten sofort

$$P_n(\{x\}) = \int \mathbf{1}_{\{x\}} dP_n \to \int \mathbf{1}_{\{x\}} dP = P(\{x\}).$$

Gilt umgekehrt diese Konvergenz für jedes $x \in S$, so folgt wegen der Abzählbarkeit von S, der σ-Additivität der Maße und dem Satz von der Dominierten Konvergenz, dass

$$P_n(A) \to P(A), \quad A \subset S,$$

was die schwache Konvergenz $P_n \xrightarrow{d} P$ nach sich zieht (zum Beispiel greift (v) des Portmanteau Theorems - es gibt viele andere Alternativen hier zu argumentieren. Man könnte auch f schreiben als $f(x) = \sum_{s \in S} f(s)\mathbf{1}\{x = s\}$ und damit die Konvergenz in der Definition der schwachen Konvergenz direkt nachweisen.) Prinzipiell gilt

$$\sum_{x \in A} P_n(\{x\}) - P(\{x\}) = 0 + \sum_{x \in A} P_n(\{x\}) - P(\{x\}) = \sum_{x \in S} P(\{x\}) - P_n(\{x\}) + \sum_{x \in A} P_n(\{x\}) - P(\{x\})$$

und also

$$|P_n(A) - P(A)| = \left| \sum_{x \in A} P_n(\{x\}) - P(\{x\}) \right| = \left| \sum_{x \in A^c} P_n(\{x\}) - P(\{x\}) \right| = |P_n(A^c) - P(A^c)|.$$

Damit folgt weiter

$$
\begin{aligned}
|P_n(A) - P(A)| &= \frac{1}{2}\{|P_n(A) - P(A)| + |P_n(A^c) - P(A^c)|\} \\
&\leq \frac{1}{2}\{\sum_{x \in A} |P_n(\{x\}) - P(\{x\})| + \sum_{x \in A^c} |P_n(\{x\}) - P(\{x\})|\} \\
&= \frac{1}{2}\{\sum_{x \in S} |P_n(\{x\}) - P(\{x\})|\},
\end{aligned}
$$

und also

$$
\sup_{A \subset S} |P_n(A) - P(A)| \leq \frac{1}{2}\{\sum_{x \in S} |P_n(\{x\}) - P(\{x\})|\}.
$$

Ferner folgt mit dem Satz von der Dominierten Konvergenz

$$
0 \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{A \subset S} |P_n(A) - P(A)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\{\sum_{x \in S} |P_n(\{x\}) - P(\{x\})|\} = \frac{1}{2}\{\sum_{x \in S} \lim_{n\to\infty} |P_n(\{x\}) - P(\{x\})|\},
$$

Nach oben Bewiesenem ist die rechte Seite gleich null, falls $P_n \xrightarrow{d} P$, was die Behauptung zeigt.

Aufgabe 2 (Satz von Scheffé)
Seien P_n, P Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem metrischen Raum E, gegeben durch Dichten p_n, p bzgl. eines (nicht notwendig endlichen) Maßes λ auf E.

(a) Zeigen Sie, dass aus $p_n \to p$ λ-f.ü. folgt dass

$$
\sup_{A \in \mathcal{E}} \left| \int_A p d\lambda - \int_A p_n d\lambda \right| = \frac{1}{2} \int |p - p_n| d\lambda \to 0.
$$

(b) Folgern Sie, dass aus $p_n \to p$ λ-f.ü. folgt dass $P_n \xrightarrow{d} P$.

(c) Geben Sie ein Beispiel, das klar macht, weshalb die Umkehrung in (b) nicht gültig ist.

Lösung:

(a) Ähnlich wie in Aufgabe 1 (ersetze Summen durch Integrale) zeigt man

$$
|P_n(A) - P(A)| = \frac{1}{2}(|P_n(A) - P(A)| + |P_n(A^c) - P(A^c)|).
$$

Weiter folgt

$$
\begin{aligned}
|P_n(A) - P(A)| &\leq \frac{1}{2}\left(\int_A |p_n(x) - p(x)|\lambda(dx) + \int_{A^c} |p_n(x) - p(x)|\lambda(dx)\right) \\
&= \frac{1}{2} \int |p_n(x) - p(x)|\lambda(dx).
\end{aligned}
$$

Ferner gilt offenbar für $A = \{p_n - p \geq 0\}$ Gleichheit. Dies zeigt die behauptete Gleichung. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt nun auch die Konvergenzaussage.

(b) Folgt direkt aus Teil (a) und Teil (v) des Portmanteau-Theorems.

(c) Setze $\lambda := \delta_0 + \lambda|_{[0,1]}$, $P_n = \int \mathbf{1}\{x \in \cdot\} n \mathbf{1}_{(0,\frac{1}{n}]}(x)\lambda(dx)$, $P := \delta_0$. Wegen

$$P_n((-\infty, t]) = 0 = P((-\infty, t]), \quad t < 0,$$

$$P_n((-\infty, t]) = n(t \wedge \frac{1}{n}) \to 1 = P((-\infty, t]), \quad t > 0,$$

und der Tatsache, dass $\{(-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\}$ ein konvergenzbestimmendes Mengensystem ist (für $t = 0$ ist $(-\infty, t]$ keine P-Stetigkeitsmenge), folgt $P_n \xrightarrow{d} P$. Bezüglich λ hat P_n die Dichte $p_n(x) = n\mathbf{1}_{(0,\frac{1}{n}]}(x)$, P die Dichte $p(x) = \mathbf{1}\{x = 0\}$. Es gilt jedoch nicht $p_n \to p$, λ-f.ü., denn $p_n(0) = 0 \not\to 1 = p(0)$ und $\{0\}$ ist keine λ-Nullmenge.

Aufgabe 3 (Rechenregel zur schwachen Konvergenz)

Seien X_n, Y_n, X Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass aus $X_n \xrightarrow{d} X$ und $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$ folgt, dass $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + a$ und $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{d} X \cdot a$.

Lösung: Nach Satz 3.27 der Vorlesung folgt $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, a)$. Nun folgen beide Behauptungen aus der Stetigkeit der Abbildungen $(x, y) \mapsto x + y$ und $(x, y) \mapsto x \cdot y$ und dem Abbildungssatz 3.29.

Aufgabe 4 (Rund um gleichgradige Integrierbarkeit)

Geben Sie Beispiele von Zufallsvariablen X_n, X, so dass

(a) $X_n \xrightarrow{d} X$, X_n integrierbar, X nicht,

(b) $X_n \xrightarrow{d} X$, X_n nicht integrierbar, X integrierbar

(c) $X_n \xrightarrow{d} X$, X_n, X integrierbar mit $\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X$, jedoch $\{X_n\}$ nicht gleichgradig integrierbar.

Lösung:

(a) X sei Cauchy verteilt, d.h.

$$P(X = k) = \frac{6}{\pi^2 \cdot k^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $\mathbb{E}|X| = \infty$. Seien weiter X_n Zufallsvariablen je mit Verteilung

$$P_n := \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}\delta_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}}.$$

Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$ dass $P_n(\{k\}) \to P^X(\{k\})$, $n \to \infty$ und mit Aufgabe 1 folgt $X_n \xrightarrow{d} X$. Es ist klar, dass $\mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}X_n \leq n < \infty$.

(b) Seien U, V, W unabhängig mit $U, V, W \sim U(0,1)$ Definiere

$$X_n := U\mathbf{1}\{W \leq \frac{n-1}{n}\} + \frac{1}{V}\mathbf{1}\{W > \frac{n-1}{n}\}, \quad X := U.$$

Wegen $\mathbb{E}\frac{1}{V} = \int_0^1 \frac{1}{x}dx = \infty$ gilt $\mathbb{E}|X_n| = \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist $\mathbb{E}|X| = \frac{1}{2} < \infty$. Um zu zeigen, dass $X_n \xrightarrow{d} X$, bemerken wir, dass $\mathcal{C}(X) = \mathbb{R}$ gilt. Sei zunächst $t \leq 1$. Dann gilt

$$P(X_n \leq t) = P(U \leq t, V \leq \frac{n-1}{n}) = P(U \leq t)\frac{n-1}{n} \to P(U \leq t) = P(X \leq t).$$

Für $t \geq 1$ folgt

$$P(X_n \leq t) = 1 - P(X_n > t) = 1 - P(W > t, V > \frac{n-1}{n}) = 1 - P(W > t)\frac{1}{n} \to 1 = P(X \leq t).$$

Man hätte auch kürzer bemerken können, dass sogar offensichtlich $X_n \xrightarrow{P} X$ gilt.

(c) Wähle $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) := ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda|_{[0,1]})$ und

$$X_n(\omega) := n\mathbf{1}\{0 \leq \omega \leq \frac{1}{n}\} - n\mathbf{1}\{\frac{1}{n} < \omega \leq \frac{2}{n}\}$$

und $X := 0$. Dann gilt

$$\mathbb{E}X_n = 0 = \mathbb{E}X$$

und sogar $X_n \xrightarrow{P} X$, insbesondere also $X_n \xrightarrow{d} X$. Dennoch sind die X_n nicht gleichgradig integrierbar, denn zu $a > 0$ gilt für alle $n > a$, dass

$$\mathbb{E}[|X_n| \cdot \mathbf{1}\{|X_n| \geq a\}] = n\frac{1}{n} + n\frac{1}{n} = 2,$$

und also

$$\sup_n \mathbb{E}[|X_n| \cdot \mathbf{1}\{|X_n| \geq a\}] = 2 \not\to 0, \quad a \to \infty.$$

Aufgabe 5 (Anwendung des Abbildungssatzes)

Sei $P = \lambda|_{[0,1]}$ und $P_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{\xi_i^n}$ mit $\xi_i^n \in (\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})$. Zeigen Sie, dass $P_n \xrightarrow{d} P$, und folgern Sie, dass jede beschränkte fast überall stetige Funktion Riemann-integrierbar ist.

Lösung: Sei $f \in \mathcal{C}_b([0,1])$. Dann ist f bekanntlich Riemann-integrierbar, weshalb

$$\int f dP_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\xi_i^n) \longrightarrow \int_0^1 f dx = \int f d\lambda, \quad n \to \infty.$$

Dies zeigt $P_n \xrightarrow{d} P$. Sei nun $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ beschränkt und fast überall stetig. Wegen $P(D_h) = 0$ folgt mit dem Abbildungssatz $P_n^h \xrightarrow{d} P^h$, was also für $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ bedeutet, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(h(\xi_i^n)) \to \int f \circ h d\lambda.$$

Da h fast überall beschränkt ist, gibt es ein $C > 0$ mit $|h| \leq C$. Definiere nun die stetige und beschränkte Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vermöge

$$\tilde{f}(x) := x\mathbf{1}\{|x| \leq C\} + C\mathbf{1}\{x > C\} - C\mathbf{1}\{x < -C\}.$$

Setzen wir diese in die obige Konvergenzaussage ein, erhalten wir direkt

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(\xi_i^n) \to \int h d\lambda < \infty,$$

und also die Riemann-Integrierbarkeit von h.