Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
PD. Dr. Dieter Kadelka · Daniel Gentner

Asymptotische Stochastik (SS 2010)

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (Straffheit auf $\mathbb{R}$)
Zeigen Sie: Eine Folge P_n von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}$ ist straff genau dann, wenn die zugehörigen Verteilungsfunktionen F_n die Eigenschaft haben, dass **gleichmäßig in** n sowohl

$$F_n(x) \to 1, \quad x \to \infty,$$

und

$$F_n(x) \to 0, \quad x \to -\infty.$$

Aufgabe 2 (Gleichgradige Integrierbarkeit impliziert Straffheit)
Sei X_n eine Folge von Zufallsvektoren im $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass aus der gleichgradigen Integrierbarkeit von

$$\{||X_n||_2^\delta : n \in \mathbb{N}\}$$

für ein $\delta > 0$ die Straffheit von $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ folgt.

Aufgabe 3 (Straffheit auf Produkträumen)
Seien E, E' jeweils metrische Räume mit Metriken d und d' und Π eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $E \times E'$. Beweisen Sie, dass Π genau dann straff ist, wenn sowohl

$$\{P(\cdot \times E') : P \in \Pi\}$$

straff auf E als auch

$$\{P(E \times \cdot) : P \in \Pi\}$$

straff auf E' ist.
Hinweis: Koordinatenabbildungen sind stetig, und für kompakte $K \subset E$, $K' \subset E'$ ist $K \times K'$ wieder kompakt.

Aufgabe 4 (Prohorov und die Cramér-Wold-Technik)
Benutzen Sie den Satz von Prohorov, um den Satz von Cramér-Wold zu beweisen. (Dieser besagt, dass für eine Folge X_n von Zufallsvektoren im $\mathbb{R}^d$ gilt, dass $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow c' \cdot X_n \xrightarrow{d} c' \cdot X, c \in \mathbb{R}^d$). Benutzen Sie dabei keine charakteristischen Funktionen, sondern nur den Eindeutigkeitssatz

$$X \stackrel{d}{=} Y \Leftrightarrow c' \cdot X \stackrel{d}{=} c' \cdot Y, \quad c \in \mathbb{R}^d.$$

Aufgabe 5 (Skorohod und der Abbildungssatz)
Folgern Sie mit Hilfe des Satzes von Skorohod auf metrischen Räumen die Gültigkeit des Abbildungssatzes für metrische Räume.