Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
PD. Dr. Dieter Kadelka · Daniel Gentner

Asymptotische Stochastik (SS 2010)

Lösungen zu Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (Straffheit auf $\mathbb{R}$)

Zeigen Sie: Eine Folge P_n von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}$ ist straff genau dann, wenn die zugehörigen Verteilungsfunktionen F_n die Eigenschaft haben, dass **gleichmäßig in** n sowohl

$$F_n(x) \to 1, \quad x \to \infty,$$

und

$$F_n(x) \to 0, \quad x \to -\infty.$$

Lösung: Sei P_n straff und $\epsilon > 0$. Dann existiert ein kompaktes $K \subset (-\infty, \infty)$ mit

$$\inf_n P_n(K) \geq 1 - \epsilon.$$

Insbesondere gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ (wähle x_0 so, dass $K \subset [-x_0, x_0]$), so dass für alle $x > x_0$ gilt, dass

$$\inf_n P_n((-x, x]) \geq 1 - \epsilon.$$

Dies bedeutet für die Verteilungsfunktionen

$$\inf_n \{F_n(x) - F_n(-x)\} \geq 1 - \epsilon, \quad x \geq x_0.$$

Es folgt sowohl

$$\inf_n F_n(x) \geq \inf_n \{F_n(x) - F_n(-x)\} \geq 1 - \epsilon, \quad x \geq x_0.$$

als auch

$$\sup_n F_n(-x) = 1-(1-\sup_n F_n(-x)) = 1-\inf_n\{1-F_n(-x)\} \leq 1-\inf_n\{F_n(x)-F_n(-x)\} \leq \epsilon, \quad x \geq x_0,$$

und damit beide Konvergenzaussagen. Gelten umgekehrt die beiden Konvergenzaussagen, also

$$\inf_n F_n(x) \to 1, \quad x \to \infty,$$

und

$$\sup_n F_n(x) \to 0, \quad x \to -\infty,$$

und ist $\epsilon > 0$ vorgegeben, so können wir $x_0 > 0$ so wählen, dass

$$\inf_n F_n(x_0) \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}, \quad \sup_n F_n(-x_0) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Wegen

$$\inf_n \{a_n + b_n\} \geq \inf_n a_n + \inf_n b_n$$

haben wir auch

$$\inf_n \{a_n - b_n\} \geq \inf_n a_n - \sup_n b_n$$

für beliebige Folgen (a_n) und (b_n). Es folgt für $K := [-x_0, x_0]$, dass

$$\inf_n P_n([-x_0, x_0]) \geq \inf_n P_n((-x_0, x_0]) = \inf_n \{F_n(x_0) - F_n(-x_0)\} \geq \inf_n F_n(x_0) - \sup_n F_n(-x_0) \geq 1 - \epsilon,$$

womit $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ als straff nachgewiesen ist.

Aufgabe 2 (Gleichgradige Integrierbarkeit impliziert Straffheit)
Sei X_n eine Folge von Zufallsvektoren im $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass aus der gleichgradigen Integrierbarkeit von

$$\{||X_n||_2^\delta : n \in \mathbb{N}\}$$

für ein $\delta > 0$ die Straffheit von $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ folgt.

Lösung: Sei $\epsilon > 0$. Wegen der gleichgradigen Integrierbarkeit können wir ein $L > 1$ so wählen, dass

$$\sup_n \int_{\{||X_n||_2^\delta > L\}} ||X_n||_2^\delta d\mathbb{P} \leq \epsilon.$$

Wir setzen $K := \{x \in \mathbb{R}^d : ||x||_2 \leq L^{\frac{1}{\delta}}\}$. Damit gilt für festes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n \in K) &= \int \mathbf{1}\{X_n \in K\} d\mathbb{P} = \int \mathbf{1}\{||X_n||_2^\delta \leq L\} d\mathbb{P} \\
&= 1 - \int_{\{||X_n||_2^\delta > L\}} d\mathbb{P} \\
&\geq 1 - \int_{\{||X_n||_2^\delta > L\}} ||X_n||_2^\delta d\mathbb{P} \\
&\geq 1 - \sup_n \int_{\{||X_n||_2^\delta > L\}} ||X_n||_2^\delta d\mathbb{P} \\
&\geq 1 - \epsilon,
\end{aligned}$$

und also

$$\inf_n \mathbb{P}(X_n \in K) \geq 1 - \epsilon.$$

Das zeigt die Straffheit der X_n.

Aufgabe 3 (Straffheit auf Produkträumen)
Seien E, E' jeweils metrische Räume mit Metriken d und d' und Π eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $E \times E'$. Beweisen Sie, dass Π genau dann straff ist, wenn sowohl

$$\{P(\cdot \times E') : P \in \Pi\}$$

straff auf E als auch

$$\{P(E \times \cdot) : P \in \Pi\}$$

straff auf E' ist.
Hinweis: Koordinatenabbildungen sind stetig, und für kompakte $K \subset E$, $K' \subset E'$ ist $K \times K'$ wieder kompakt.

Lösung: Sei zunächst Π straff, d.h. zu $\epsilon > 0$ gibt es ein kompaktes $K \subset E \times E'$ mit

$$\inf_{P \in \Pi} P(K) \geq 1 - \epsilon.$$

Wir betrachten die stetigen Projetkionen

$$\pi_E : E \times E' \to E$$

und

$$\pi_{E'} : E \times E' \to E'$$

auf die einzelnen Faktoren. Da stetige Funktionen Kompakta wieder auf Kompakta abbilden, sind die Mengen

$$K_E := \pi_E(K), \quad K_{E'} := \pi_{E'}(K)$$

kompakt. Wegen $K_E \times E' \supset K$ ist für $P \in \Pi$ damit

$$P(K_E \times E') \geq P(K) \geq \inf_{P \in \Pi} P(K) \geq 1 - \epsilon,$$

und also

$$\inf_{P \in \Pi} P(K_E \times E') \geq 1 - \epsilon,$$

was die Straffheit der Projektionsmaße auf die erste Komponente zeigt. Analog argumentiert man für die Projektionen auf die zweite Kompoenente.
Um die umgekehrte Richtung zu zeigen, sei $\epsilon > 0$ und $K_E \subset E$ und $K_{E'} \subset E'$ je kompakt mit der Eigenschaft

$$\inf_{P \in \Pi} P(K_E \times E') \geq 1 - \frac{\epsilon}{2},$$

bzw.

$$\inf_{P \in \Pi} P(E \times K_{E'}) \geq 1 - \frac{\epsilon}{2}.$$

Setzen wir $K := K_E \times K_{E'}$, so ist K kompakt und wir erhalten

$$P(K) = P((K_E \times E') \cap (E \times K_{E'})) = 1 - P((K_E \times E')^c \cup (E \times K_{E'})^c) \geq 1 - 2\frac{\epsilon}{2} = 1 - \epsilon,$$

also

$$\inf_{P \in \Pi} P(K) \geq 1 - \epsilon,$$

und damit die Straffheit von Π.

Aufgabe 4 (Prohorov und die Cramér-Wold-Technik)
Benutzen Sie den Satz von Prohorov, um den Satz von Cramér-Wold zu beweisen. (Dieser besagt, dass für eine Folge X_n von Zufallsvektoren im $\mathbb{R}^d$ gilt, dass $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow c' \cdot X_n \xrightarrow{d} c' \cdot X, c \in \mathbb{R}^d$). Benutzen Sie dabei keine charakteristischen Funktionen, sondern nur den Eindeutigkeitssatz

$$X \stackrel{d}{=} Y \Leftrightarrow c' \cdot X \stackrel{d}{=} c' \cdot Y, \quad c \in \mathbb{R}^d.$$

Lösung: Die Richtung von links nach rechts ergibt sich sofort aus dem Abbildungssatz für Verteilungskonvergenz. Um die umgekehrte Richtung zu zeigen, gelte also

$$c' \cdot X_n \xrightarrow{d} c' \cdot X, \quad c \in \mathbb{R}^d.$$

Setzen wir für c die Standardbasisvektoren ein, erhalten wir

$$X_n^{(i)} \xrightarrow{d} X^{(i)}, \quad i \in \{1, ..., n\,.$$

wobei jeweils die i.-ten Koordinaten gemeint sind. Der Satz von Prohorov liefert nun die Straffheit der Familien $\{X_n^{(i)} : n \in \mathbb{N}\}$ für jedes i, und nach Aufgabe 3 ist deshalb $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ selbst straff. Umgekehrt liefert Prohorov jetzt aber die relative Kompaktheit von $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, was bedeutet, dass jede Teilfolge $\{X_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ eine weitere Teilfolge $\{X_{n_{k_l}} : l \in \mathbb{N}\}$ enthält, welche jeweils schwach gegen ein (zunächst von der Folge abhängiges!) Wahrscheinlichkeitsmaß (!) Q konvergiert. Es gilt einerseits mit dem Abbdilungsprinzip

$$c' \cdot X_{n_{k_l}} \xrightarrow{d} Q \circ p_c^{-1},$$

wobei $p_c : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, p_c(x) := c' \cdot x$ ist, andererseits nach Voraussetzung

$$c' \cdot X_{n_{k_l}} \xrightarrow{d} c' \cdot X.$$

Es folgt wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes bei schwacher Konvergenz, dass

$$Q \circ p_c^{-1} = P^{c' \cdot X},$$

und der Eindeutgkeitssatz liefert schließlich $Q = P^X$ (Q hängt damit also auch nicht von der approximierenden Folge ab). Das Teilfolgenkriterium liefert schließlich $X_n \xrightarrow{d} X$.

Aufgabe 5 (Skorohod und der Abbildungssatz)
Folgern Sie mit Hilfe des Satzes von Skorohod auf metrischen Räumen die Gültigkeit des Abbildungssatzes für metrische Räume.

Lösung: Seien E und E' metrische Räume, X_n eine Folge von Zufallselementen in E, X ein weiteres Zufallselement in E, $X_n \xrightarrow{d} X$ und $f : E \to E'$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass $\mathbb{P}^X(D_f) = 0$, wobei zu beachten ist, dass nach Lemma 3.28 die Menge D_f aller Unstetigkeitsstellen von f stets messbar ist (ohne dass an f irgendwelche Voraussetzungen zu machen wären). Zu zeigen ist

$$f(X_n) \xrightarrow{d} f(X).$$

Der Satz von Skorohod für metrische Räume liefert nun Versionen $Y_n \stackrel{d}{=} X_n$, $Y \stackrel{d}{=} X$ mit

$$Y_n \to Y \quad \text{f.s..}$$

Damit folgt auf $\{Y \in C_f\}$, dass

$$f(Y_n) \to f(Y) \quad \text{f.s.}$$

und wegen $\mathbb{P}(Y \in C_f) = 1$ sogar auf Ω

$$f(Y_n) \to f(Y) \quad \text{f.s..}$$

Dies impliziert bekanntlich $f(Y_n) \xrightarrow{d} f(Y)$, und damit auch

$$f(X_n) \xrightarrow{d} f(X).$$