Institut für Stochastik
PD. Dr. Dieter Kadelka · Daniel Gentner

Asymptotische Stochastik (SS 2010)

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (lokaler Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace und eine Verallgemeinerung)
Der lokale GWS von de Moivre und Laplace kann wie folgt formuliert werden:
Sei $0 < p < 1$ fest und $Y_n \sim Bin(n,p)$, insbesondere $EY_n = np$, $\mathrm{Var}(Y_n) = np(1-p)$. Ferner sei φ_{μ,σ^2} die Lebesgue-Dichte von $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Zeigen Sie, dass für alle $C > 0$ gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k:|k-np|\le C\cdot\sqrt{np(1-p)}} \left| \frac{\mathbb{P}(Y_n = k)}{\varphi_{np,np(1-p)}(k)} - 1 \right| = 0.$$

(D.h. die Zähldichte der Binomialverteilung und die (stetige) Dichte der Normalverteilung sind asymptotisch gleich, und zwar gleichmäßig in k auf kompakten (d.h. hier endlichen) Mengen.)
Man beweise die folgende, allgemeinere Aussage:
Seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, Zufallsvariable mit Werten in $T_n := a_n \cdot \mathbb{N}_0 + b_n$, wobei $a_n > 0$. Die Zähldichte $t \to f_n(t) := \mathbb{P}(X_n = t)$, $t \in T_n$ habe die Eigenschaft

$$(*) \quad k \to \frac{f_n(a_n(k+1)+b_n)}{f_n(a_nk+b_n)} \downarrow \text{ für } k \in \mathbb{N}_0$$

(mit $0/0 := 0$). Gilt $X_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$, so gilt für alle $0 < c < \infty$

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in T_n:\,|t|\le c} \left| \frac{f_n(t)/a_n}{\varphi(t)} - 1 \right| = 0.$$

Aufgabe 2 (Einfache eindimensionale Irrfahrt)
Seien $X_1, X_2, ... \sim Bin(1, \frac{1}{2})$ und

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i$$

die eindimensionale Irrfahrt. Sei T_n das größte $0 \le i \le n$ mit $S_i = 0$ und V_n die Anzahl der $1 \le i \le T_n$ mit $S_{i-1} \ge 0$ und $S_i \ge 0$. Wir setzen die Gültigkeit der Gleichungen

$$(2) \qquad \mathbb{P}(S_1 > 0, ..., S_{n-1} > 0, S_n = j) = \frac{j}{n}\mathbb{P}(S_n = j), \quad j > 0, n \in \mathbb{N}.$$

und

$$(3) \qquad \mathbb{P}(V_{2m} = 2i | S_{2m} = 0) = \frac{1}{m+1}, \quad i \in \{0,1,...,m\}, m \in \mathbb{N},$$

voraus. Leiten Sie ab, dass für $0 \le 2i \le 2k < n$, $j > 0$ gilt, dass

$$\mathbb{P}(T_n = 2k, V_n = 2i, S_n = j) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\frac{1}{k+1}\frac{j}{n-2k}\mathbb{P}(S_{n-2k} = j).$$

Aufgabe 3 (Transformationen von Brownscher Brücke und Brownscher Bewegung)
Sei B eine Brownsche Bewegung auf $[0, \infty)$ und B^0 eine Brownsche Brücke auf $[0,1]$ (von 0 nach 0). Zeigen Sie:

(a) Für $c > 0$ ist der skalierte Prozess $cB_{\frac{t}{c^2}}$ eine Brownsche Bewegung. (Skalierungseigenschaft)

(b) Der zeitinvertierte Prozess $X_0 = 0, X_t := tB_{\frac{1}{t}}, t > 0$ ist eine Brownsche Bewegung. (Zeitinversionseigenschaft der Brownschen Bewegung)

(c) Der Prozess $B^0_{(1-t)}$ ist wieder eine Brownsche Brücke. (Zeitinversionseigenschaft der Brownschen Brücke)

(d) $tB_{(1-t)/t}$ ist eine Brownsche Brücke (Trafo von BB zu Brücke)

(e) $(1+t)B^0_{t/(1+t)}$ ist eine Brownsche Bewegung auf $[0, \infty)$ (Trafo von Brücke zu BB)

Aufgabe 4 (Linearkombinationen von Gaussprozessen und Brownschen Bewegungen)

(a) Seien X und Y unabhängige Gaussprozesse auf einem metrischen Raum E. Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$
$$aX + bY$$
wieder ein Gaussprozess ist.

(b) Seien W und $\tilde{W}$ unabhängige Brownsche Bewegungen. Für welche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ist
$$aW + b\tilde{W}$$
wieder eine Brownsche Bewegung?