Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
PD. Dr. Dieter Kadelka · Daniel Gentner

Asymptotische Stochastik (SS 2010)

Lösungen zu Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (lokaler Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace und eine Verallgemeinerung)
Der lokale GWS von de Moivre und Laplace kann wie folgt formuliert werden:
Sei $0 < p < 1$ fest und $Y_n \sim Bin(n,p)$, insbesondere $EY_n = np$, $\mathrm{Var}(Y_n) = np(1-p)$. Ferner sei φ_{μ,σ^2} die Lebesgue-Dichte von $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Zeigen Sie, dass für alle $C > 0$ gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k:|k-np|\leq C\cdot\sqrt{np(1-p)}} \left| \frac{\mathbb{P}(Y_n = k)}{\varphi_{np,np(1-p)}(k)} - 1 \right| = 0.$$

(D.h. die Zähldichte der Binomialverteilung und die (stetige) Dichte der Normalverteilung sind asymptotisch gleich, und zwar gleichmäßig in k auf kompakten (d.h. hier endlichen) Mengen.)
Man beweise die folgende, allgemeinere Aussage:
Seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, Zufallsvariable mit Werten in $T_n := a_n \cdot \mathbb{N}_0 + b_n$, wobei $a_n > 0$. Die Zähldichte $t \to f_n(t) := \mathbb{P}(X_n = t)$, $t \in T_n$ habe die Eigenschaft

$$(*) \quad k \to \frac{f_n(a_n(k+1) + b_n)}{f_n(a_n k + b_n)} \downarrow \text{ für } k \in \mathbb{N}_0$$

(mit $0/0 := 0$). Gilt $X_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$, so gilt für alle $0 < c < \infty$

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in T_n:\,|t|\leq c} \left| \frac{f_n(t)/a_n}{\varphi(t)} - 1 \right| = 0.$$

Lösung: Sei F_n die Verteilungsfunktion von X_n. Es gilt $F_n(x) = \sum_{t\in T_n:\, t\leq x} f_n(t)$, $x \in \mathbb{R}$. Sei Φ die Verteilungsfunktion von $\mathcal{N}(0,1)$.

(i) Aus dem Satz von Polya (Blatt 1, Aufgabe 2) folgt wegen der Stetigkeit von Φ

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| = 0$$

und hieraus auch

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{-\infty\leq x<y\leq\infty} |\mathbb{P}(x < X_n \leq y) - (\Phi(y) - \Phi(x))| = 0.$$

Da alle F_n konstant auf Intervallen der Länge a_n sind, folgt hieraus auch

$$(3) \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

(ii) (1) ist äquivalent zu

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in T_n:\,|t|\leq c} \left| \frac{f_n(t)}{a_n} - \varphi(t) \right| = 0.$$

Denn $\left|\frac{f_n(t)/a_n}{\varphi(t)} - 1\right| = \frac{1}{\varphi(t)} \left|\frac{f_n(t)}{a_n} - \varphi(t)\right|$ und $2.5 \leq \frac{1}{\varphi(t)} \leq \frac{1}{\varphi(c)} < \infty$ für $|t| \leq c$.

(iii) Die Zähldichten f_n sind *unimodal*, d.h. sie besitzen eine Maximimumstelle $t_n^* \in T_n$, sind links von t_n^* monoton steigend und rechts von t_m^* monoton fallend (nicht notwendig strikt).

Dies ist eine Konsequenz von $(*)$. Es gibt ein $k_n \in \mathbb{N}_0$ mit $\frac{f_n(a_n(k+1)+b_n)}{f_n(a_nk+b_n)} \geq 1$ für $k < k_n$ und $\frac{f_n(a_n(k+1)+b_n)}{f_n(a_nk+b_n)} < 1$ für $k \geq k_n$. Denn es ist nicht möglich, dass $\frac{f_n(a_n(k+1)+b_n)}{f_n(a_nk+b_n)} \geq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. $k_n = 0$ ist allerdings nicht ausgeschlossen. $t_n^* := a_n \cdot k_n + b_n$ ist dann der gesuchte Wert.

(iv) Sei $\varphi_n(t) := \frac{f_n(a_nk+b_n)}{a_n}$ für $a_nk + b_n \leq t \leq a_n(k+1) + b_n$ und $\varphi_n(t) = 0$ für $t < b_n$. Die φ_n sind dann Dichten von Verteilungen P_n mit Verteilungsfunktionen G_n (eine Art „Histogrammbildung"). Da die f_n unimodal sind, sind auch die Dichten φ_n unimodal. Nach Konstruktion ist t_n^* ein Modalwert von φ_n.

Ist Y_n eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion G_n und $X_n' := a_nk + b_n$ für $a_nk + b_n \leq Y_n \leq a_n(k+1) + b_n$, so gilt $X_n' \sim X_n$ nach Konstruktion und $|Y_n - X_n'| \leq a_n$. Wegen Satz 3.23 folgt aus $X_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$ auch $Y_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$. Aus (1) wird

$$(5) \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{-\infty \leq x < y \leq \infty} |(G_n(y) - G_n(x)) - (\Phi(y) - \Phi(x))| = 0.$$

Hinreichend für (4) ist jetzt der Nachweis von

$$(6) \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi_n(t) - \varphi(t)| = 0.$$

(v) Sind die Dichten φ_n unimodal (ohne dass $(*)$ gefordert wird), so gilt

$$(7) \qquad 3\alpha := \liminf_{n\to\infty} \inf_{t\in\mathbb{R}} (\varphi_n(t) - \varphi(t)) \geq 0.$$

Denn sei $\alpha < 0$. Dann gibt es nach Übergang zu einer Teilfolge von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine notwendig beschränkte Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty}(\varphi_n(t_n) - \varphi(t_n)) = 3\alpha$. Nach Übergang zu einer weiteren Teilfolge kann angenommen werden, dass $t^* := \lim_{n\to\infty} t_n$ existiert und wegen der Stetigkeit von φ dann

$$(8) \qquad \lim_{n\to\infty} (\varphi_n(t_n) - \varphi(t^*)) = 3\alpha < 0.$$

Da φ stetig ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $\varphi(t) \geq \varphi(t^*) + \alpha$ für alle $t \in [t^* - \epsilon, t^* + \epsilon]$. Da die φ_n unimodal sind, gilt $\varphi_n(t) \leq \varphi_n(t_n)$ für alle $t \leq t_n$ oder alle $t \geq t_n$. Sei etwa $\varphi_n(t) \leq \varphi_n(t_n)$ für alle $t \leq t_n$. Für genügend großes n gilt $t_n \geq t^* - \epsilon/2$ und

$$\begin{aligned} G_n(t^* - \epsilon/2) - G_n(t^* - \epsilon) &= \int_{t^*-\epsilon}^{t^*-\epsilon/2} \varphi_n(t)\, dt \leq \varphi_n(t_n) \cdot \frac{\epsilon}{2} \leq (\varphi(t^*) + 2\alpha) \cdot \frac{\epsilon}{2} \\ &\leq \int_{t^*-\epsilon}^{t^*-\epsilon/2} (\varphi(t) + \alpha)\, dt = \Phi(t^* - \epsilon/2) - \Phi(t^* - \epsilon) + \alpha \cdot \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

im Widerspruch zu (5). Analog geht man vor, wenn $\varphi_n(t) \leq \varphi_n(t_n)$ für alle $t \geq t_n$.

(vi) Sind die Dichten φ_n unimodal und ist $t_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ ein (beliebiger) Modalwert von φ_n, so gilt $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$.

Andernfalls kann nach Übergang zu einer Teilfolge erreicht werden, dass ein $\delta > 0$ existiert mit $|t_n| \leq \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$, etwa nach Übergang zu einer weiteren Teilfolge $t_n \geq \delta > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt, dass $\varphi_n \uparrow$ auf $(-\infty, \delta]$. Wegen

$$\epsilon \cdot \varphi(\epsilon) \leq \Phi(\epsilon) - \Phi(0) = \lim_{n\to\infty} (G_n(\epsilon) - G_n(0)) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\epsilon \varphi_n(t)\, dt \leq \epsilon \cdot \liminf_{n\to\infty} \varphi_n(\delta/2)$$

für alle $0 < \epsilon \leq \delta/2$ gilt notwendig $\liminf_{n\to\infty} \varphi_n(\delta/2) \geq \varphi(0)$, also auch

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{t\colon \delta/2 \leq t \leq \delta} \varphi_n(t) \geq \varphi(0).$$

Hieraus folgt direkt der Widerspruch

$$\delta/2 \cdot \varphi(\delta/2) \geq \int_{\delta/2}^{\delta} \varphi(t)\, dt = G(\delta) - G(\delta/2) = \lim_{n\to\infty} (G_n(\delta) - G_n(\delta/2)) \geq \delta/2 \cdot \varphi(0).$$

(vii) Sind die Dichten φ_n unimodal, so gilt für alle $\delta > 0$

(9) $$3\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}\colon |t|\geq\delta} (\varphi_n(t) - \varphi(t)) \leq 0.$$

Wegen (vi) kann angenommen werden, dass $\varphi_n \uparrow$ auf $(-\infty, -\frac{\delta}{2}]$ und $\varphi_n \downarrow$ auf $[\frac{\delta}{2}, \infty)$.

Denn gilt dies nicht, so existiert wie in (v) nach Übergang zu einer Teilfolge von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein endliches $\alpha > 0$ und eine beschränkte Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\{t \in \mathbb{R}\colon |t| \geq \delta\}$, so dass $t^* := \lim_{n\to\infty} t_n$ existiert und

(10) $$\lim_{n\to\infty} (\varphi_n(t_n) - \varphi(t^*)) \geq 3\alpha > 0$$

gilt. ($\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t_n) = \infty$ kann vorerst nicht ausgeschlossen werden.) Sei etwa $t^* \geq \delta$ und $v \in [\frac{3}{4}\delta, t^*)$ beliebig mit $\varphi(v) < \varphi(t^*) + \alpha$. Für genügend großes n gilt dann $t_n > v$ und $\varphi_n(t_n) \geq \varphi(t^*) + 2\alpha > \varphi(v) + \alpha$. Da $\varphi \downarrow$ auf $[\frac{\delta}{2}, \infty)$ gilt $\varphi_n(v) > \varphi(v) + \alpha$. Da φ stetig ist, gibt es ein $\frac{\delta}{2} \leq u < v$ mit $\varphi(u) < \varphi(v) + \alpha/2$, also auch $\varphi_n(t) \geq \varphi_n(v) > \varphi(v) + \alpha > \varphi(t) + \alpha/2$ für alle $u \leq t \leq v$. Wie früher steht dies im Widerspruch zu $\lim_{n\to\infty}(G_n(v) - G_n(u)) = \Phi(v) - \Phi(u)$.

(viii) Einfache Gegenbeispiele zeigen, dass ohne weitere Voraussetzungen $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(t_n)}{a_n} = \infty$ möglich ist. (1) kann dann nicht gelten. Kombiniert man (v) und (vii), so folgt aus $X_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$ für unimodale Zähldichten f_n von X_n

(11) $$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in T_n\colon |t|\geq\delta} \left| \frac{f_n(t)}{a_n} - \varphi(t) \right| = 0 \quad \text{für alle } \delta > 0$$

und zusätzlich

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{t\in T_n} \left| \frac{f_n(t)}{a_n} - \varphi(t) \right| \geq 0.$$

Ersetzt man X_n durch $X_n - t_n$, so gilt wegen Satz 3.23 und (vi) wieder $X_n - t_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$ und an der Bedingung $(*)$ ändert sich nichts. Wir können daher der Einfachheit halber

$t_n = 0$ voraussetzen und es reicht wegen $\min\{f_n(-\delta), f_n(\delta)\} \leq f_n(t) \leq f_n(0)$ für $-\delta \leq t \leq \delta$ in T_n

$$(**) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(0)}{a_n} = \varphi(0)$$

zu zeigen, wobei $\liminf_{n\to\infty} \frac{f_n(0)}{a_n} \geq \varphi(0)$ schon bekannt ist. Dies folgt z.B. aus $(*)$. Denn aus $\log(f_n(a_n(k+1)+b_n)) - \log(f_n(a_nk+b_n)) \downarrow$ folgt, dass $k \to \log(f_n(a_nk+b_n))$ konkav ist und $\log(\varphi(x)) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) - x^2/2$ (Skizze!).

Aufgabe 2 (Einfache eindimensionale Irrfahrt)
Seien $X_1, X_2, ... \sim Bin(1, \frac{1}{2})$ und

$$S_n := \sum_{i=1}^n X_i$$

die eindimensionale Irrfahrt. Sei T_n das größte $0 \leq i \leq n$ mit $S_i = 0$ und V_n die Anzahl der $1 \leq i \leq T_n$ mit $S_{i-1} \geq 0$ und $S_i \geq 0$. Wir setzen die Gültigkeit der Gleichungen

$$(12) \qquad \mathbb{P}(S_1 > 0, ..., S_{n-1} > 0, S_n = j) = \frac{j}{n}\mathbb{P}(S_n = j), \quad j > 0, n \in \mathbb{N}.$$

und

$$(13) \qquad \mathbb{P}(V_{2m} = 2i | S_{2m} = 0) = \frac{1}{m+1}, \quad i \in \{0, 1, ..., m\}, m \in \mathbb{N},$$

voraus. Leiten Sie ab, dass für $0 \leq 2i \leq 2k < n$, $j > 0$ gilt, dass

$$\mathbb{P}(T_n = 2k, V_n = 2i, S_n = j) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\frac{1}{k+1}\frac{j}{n-2k}\mathbb{P}(S_{n-2k} = j).$$

Lösung: Bedingen nach $\{S_{2k} = 0\}$ liefert zunächst

$$\mathbb{P}(T_n = 2k, V_n = 2i, S_n = j) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\mathbb{P}(T_n = 2k, V_{2k} = 2i, S_n = j | S_{2k} = 0).$$

Gegeben $\{S_{2k} = 0\}$ sind $(S_1, ..., S_{2k})$ und $(S_{2k+1}, ..., S_n)$ unabhängig! V_{2k} hängt gegeben $\{S_{2k} = 0\}$ nur von der ersten Folge ab, die beiden anderen Zufallsvariablen hingegen nur von der zweiten. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_n = 2k, V_n = 2i, S_n = j) &= \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\mathbb{P}(T_n = 2k, V_{2k} = 2i, S_n = j | S_{2k} = 0) \\
&= \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\mathbb{P}(V_{2k} = 2i | S_{2k} = 0)\mathbb{P}(T_n = 2k, S_n = j | S_{2k} = 0) \\
&= \mathbb{P}(S_{2k} = 0)\mathbb{P}(V_{2k} = 2i | S_{2k} = 0)\mathbb{P}(S_{2k+1} > 0, ..., S_n > 0, S_n = j | S_{2k} = 0)
\end{aligned}$$

Mit (1) und (2) folgt nun die Behauptung.

Aufgabe 3 (Transformationen von Brownscher Brücke und Brownscher Bewegung)
Sei B eine Brownsche Bewegung auf $[0, \infty)$ und B^0 eine Brownsche Brücke auf $[0, 1]$ (von 0 nach 0). Zeigen Sie:

(a) Für $c > 0$ ist der skalierte Prozess $cB_{\frac{t}{c^2}}$ eine Brownsche Bewegung. (Skalierungseigenschaft)

(b) Der zeitinvertierte Prozess $X_0 = 0, X_t := tB_{\frac{1}{t}}, t > 0$ ist eine Brownsche Bewegung. (Zeitinversionseigenschaft der Brownschen Bewegung)

(c) Der Prozess $B^0_{(1-t)}$ ist wieder eine Brownsche Brücke. (Zeitinversionseigenschaft der Brownschen Brücke)

(d) $tB_{(1-t)/t}$ ist eine Brownsche Brücke (Trafo von BB zu Brücke)

(e) $(1+t)B^0_{t/(1+t)}$ ist eine Brownsche Bewegung auf $[0,\infty)$ (Trafo von Brücke zu BB)

Lösung: Es ist klar, dass alle in den Aufgabenteilen genannten Prozesse Gaussprozesse sind. Ein Gaussprozess auf E ist bekanntlich bereits durch Angabe der Funktionen

$$M_X : E \to \mathbb{R}, \quad e \mapsto EX_e$$

und

$$C_X : E \times E \to \mathbb{R}, \quad (e, e') \mapsto \mathrm{Cov}(X_e, X_{e'})$$

eindeutig festgelegt. Hier ist $E = [0,\infty)$. Ist B Brownsche Bewegung, so folgt

$$M_B(t) = EB_t = 0, \quad t \in [0,\infty)$$

und für $s < t$

$$\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = E(B_sB_t) = E(B_s(B_t - B_s + B_s)) = E(B_s(B_t - B_s)) + E(B_s^2) = s,$$

also $C_B(s,t) = \min(s,t)$. Nach Definition gilt für eine Brownsche Brücke B^0

$$M_{B^0}(t) = 0, \quad 0 \le t \le 1,$$

$$C_{B^0}(s,t) = s(1-t), \quad 0 \le s \le t \le 1.$$

Damit genügt es, in allen Teilen zu zeigen, dass die Funktionen M und C jeweils denen einer Brownschen Bewegung bzw. Brownschen Brücke entsprechen.

(a) Für $X := cB_{\frac{t}{c^2}}$ ist offenbar $M_X \equiv 0$ und

$$C_X(s,t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t) = E(cB_{s/c^2}cB_{t/c^2}) = c^2 \min(s/c^2, t/c^2) = \min(s,t).$$

X ist also Brownsche Bewegung.

(b) Für X gilt $EX_0 = 0$ und für $t > 0$

$$EX_t = tEB_{\frac{1}{t}} = t \cdot 0 = 0,$$

und für $s, t > 0$

$$\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = E(X_sX_t) = stE(B_{\frac{1}{s}}B_{\frac{1}{t}}) = \frac{st}{\max(s,t)} = \min(s,t).$$

Für $s = 0$ oder $t = 0$ folgt diese Beziehung trivialerweise. Beachten Sie, dass damit insbesondere die Stetigkeit der Pfade von X in 0 folgt - eine keineswegs triviale Aussage über die Asymptotik der Brownschen Bewegung für $t \to \infty$!

(c) Es gilt für $X_t = B^0_{(1-t)}$, dass $E_X \equiv 0$ und da für $0 \leq s \leq t \leq 1$ gilt, dass $0 \leq 1-t \leq 1-s \leq 1$ ist, folgt nach Definition der Brownschen Brücke

$$C_X(s,t) = E(B^0_{(1-s)} B^0_{(1-t)}) = (1-t)(1-(1-s)) = s(1-t).$$

Damit ist X wieder Brownsche Brücke.

(d) Für $X_t := tB_{(1-t)/t}$ ist offenbar $E_X \equiv 0$ und für $0 \leq s \leq t \leq 1$ gilt

$$C_X(s,t) = E(sB_{(1-s)/s} tB_{(1-t)/t}) = st \min((1-s)/s, (1-t)/t).$$

Da $x \mapsto (1-x)/x$ auf $[0,1]$ monoton fällt, folgt weiter

$$C_X(s,t) = st(1-t)/t = s(1-t).$$

(e) Für $X_t := (1+t)B^0_{t/(1+t)}$ ist offenbar $E_X \equiv 0$ und für $0 \leq s \leq t < \infty$ nach Definition der Brownschen Brücke (es ist zu beachten, dass stets $s/(1+s) \leq t/(1+t) \in [0,1]$)

$$\begin{aligned} C_X(s,t) &= E((1+s)B^0_{s/(1+s)}(1+t)B^0_{t/(1+t)}) = (1+s)(1+t)s/(1+s)(1-t/(1+t)) \\ &= s(1+t-t) = s. \end{aligned}$$

Damit ist X eine Brownsche Bewegung.

Aufgabe 4 (Linearkombinationen von Gaussprozessen und Brownschen Bewegungen)

(a) Seien X und Y unabhängige Gaussprozesse auf einem metrischen Raum E. Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$

$$aX + bY$$

wieder ein Gaussprozess ist.

(b) Seien W und $\tilde{W}$ unabhängige Brownsche Bewegungen. Für welche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$aW + b\tilde{W}$$

wieder eine Brownsche Bewegung?

Lösung:

(a) In dieser Vorlesung besitzen Gaussprozesse nach Definition stetige Pfade - es ist klar, dass sich diese Eigenschaft auf Linearkombinationen vererbt. Es bleibt zu zeigen, dass die endlich-dimensionalen Verteilungen von $aX + bY$ (mehrdimensionale) Normalverteilungen sind. Dies ist der Fall, denn für $n \in \mathbb{N}, (t_1, ..., t_n) \in E^n$ gibt es $\mu_X, \mu_Y \in \mathbb{R}^n$, $A_X, A_Y \in \mathbb{R}^{n^2}$ so, dass

$$(X_{t_1}, ..., X_{t_n}) \sim \mathcal{N}(\mu_X, A_X)$$
$$(Y_{t_1}, ..., Y_{t_n}) \sim \mathcal{N}(\mu_Y, A_Y).$$

Nach dem Additionasgesetz für unabhängige (!) normalverteilte Zufallsvektoren (siehe SII, 18.13) folgt dann aber

$$a(X_{t_1}, ..., X_{t_n}) + b(Y_{t_1}, ..., Y_{t_n}) \sim \mathcal{N}(a\mu_X + b\mu_Y, a^2 A_X + b^2 A_Y).$$

(b) Nach Teil (a) ist $aW + b\tilde{W}$ ein Gaussprozess. Ein Gaussprozess auf E ist bekanntlich bereits durch Angabe der Funktionen

$$M_X : E \to \mathbb{R}, \quad e \mapsto EX_e$$

und

$$C_X : E \times E \to \mathbb{R}, \quad (e, e') \mapsto \mathrm{Cov}(X_e, X_{e'})$$

eindeutig festgelegt. Hier ist $E = [0, \infty)$ und $M_{aW+b\tilde{W}}(t) \equiv 0, t \in [0, \infty)$ und

$$\begin{aligned} C_{aW+b\tilde{W}}(s,t) &= \mathrm{Cov}(aW_s + b\tilde{W}_s, aW_t + b\tilde{W}_t) \\ &= \mathrm{Cov}(aW_s, aW_t) + \mathrm{Cov}(aW_s, b\tilde{W}_t) + \mathrm{Cov}(b\tilde{W}_s, aW_t) + \mathrm{Cov}(b\tilde{W}_s, b\tilde{W}_t) \\ &= a^2 \min(s,t) + 0 + 0 + b^2 \min(s,t) \\ &= (a^2 + b^2) \min(s,t). \end{aligned}$$

Damit ist $aW + b\tilde{W}$ genau dann eine Brownsche Bewegung, wenn $a^2 + b^2 = 1$.