Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
PD. Dr. Dieter Kadelka · Daniel Gentner

Asymptotische Stochastik (SS 2010)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Seien X und Y Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F bzw. G. Man sagt, dass X *stochastisch dominiert* oder auch *in Verteilung dominiert* wird von Y falls

$$F(x) \geq G(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wir schreiben dafür $X \overset{d}{\leq} Y$. Die verallgemeinerte Inverse $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ einer Verteilungsfunktion F ist definiert als

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}, \quad u \in (0,1).$$

(a) Zeigen Sie, dass $F^{-1}(u) \leq x$ genau dann wenn $u \leq F(x)$.

(b) Beweisen Sie, dass für $U \sim U[0,1]$ gilt, dass $X \overset{d}{=} F^{-1}(U)$.

(c) Zeigen sie: $X \overset{d}{\leq} Y$ genau dann wenn es Zufallsvariablen $\hat{X}$ und $\hat{Y}$ gibt mit $\hat{X} \overset{d}{=} X$ und $\hat{Y} \overset{d}{=} Y$ (d.h. zwei *Kopien* von X und Y) mit der Eigenschaft, dass $\hat{X} \leq \hat{Y}$ ω-weise.

Aufgabe 2

Sei $\lambda \in \Lambda$. Zeigen Sie:

(a) $\lambda^{-1} \in \Lambda$ mit $||\lambda^{-1}|| = ||\lambda||$,

(b) Ist λ stetig differenzierbar, so

$$||\lambda|| = \sup_{0<t<1} |\ln(\lambda'(t))|.$$

(Wir setzen hier $\ln(0) := -\infty$.)

(c) Ist λ stetig, aber nur stückweise stetig differenzierbar, sagen wir jeweils zwischen $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{r-1} < t_r = 1$ für ein $r \in \mathbb{N}$, so gilt

$$||\lambda|| = \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \sup_{t_{i-1}<t<t_i} |\ln \lambda'(t)| \right\}$$

(d) Welche Form nimmt die Formel in Teil (c) an für stückweise affines λ?

Aufgabe 3

(a) Sei E eine Menge und d_1, d_2 Metriken auf E mit $d_1 \leq d_2$. Zeigen Sie, dass Konvergenz bezüglich d_2 Konvergenz bezüglich d_1 nach sich zieht und dass die von d_1 induzierte Topologie $\mathcal{O}(d_1)$ gröber als die von d_2 induzierte $\mathcal{O}(d_2)$ ist, d.h. dass

$$\mathcal{O}(d_1) \subset \mathcal{O}(d_2).$$

(b) Sei d_0 die Skorohod-Metrik auf D^V und ρ die Supremumsmetrik auf D^V. Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}^V \subset \mathcal{D}^V_\rho$, aber andererseits

$$h : (D^V, d_0) \to (D^V, \rho), \quad h(f) := f$$

nicht $\mathcal{D}^V/\mathcal{D}^V_\rho$-messbar ist (also nicht $\mathcal{D}^V \supset \mathcal{D}^V_\rho$).

Aufgabe 4

Nach Theorem 9.13 ist (D^V, d_0) vollständig und nach Lemma 9.23 gilt

$$d_0(f_n, f) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad d(f_n, f) \to 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass (D, d) nicht vollständig ist.

(b) Zeigen Sie, dass falls $\{f_n\}$ d_0-Cauchyfolge ist $\{f_n\}$ auch d-Cauchyfolge ist

(c) Zeigen Sie, dass die Umkehrung in Teil (b) falsch ist. Was ist hier entscheidend?