Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
PD. Dr. Dieter Kadelka · Daniel Gentner

Asymptotische Stochastik (SS 2010)

Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Seien X und Y Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F bzw. G. Man sagt, dass X *stochastisch dominiert* oder auch *in Verteilung dominiert* wird von Y falls

$$F(x) \geq G(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wir schreiben dafür $X \overset{d}{\leq} Y$. Die verallgemeinerte Inverse $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$ einer Verteilungsfunktion F ist definiert als

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}, \quad u \in (0,1).$$

(a) Zeigen Sie, dass $F^{-1}(u) \leq x$ genau dann wenn $u \leq F(x)$.

(b) Beweisen Sie, dass für $U \sim U[0,1]$ gilt, dass $X \overset{d}{=} F^{-1}(U)$.

(c) Zeigen sie: $X \overset{d}{\leq} Y$ genau dann wenn es Zufallsvariablen $\hat{X}$ und $\hat{Y}$ gibt mit $\hat{X} \overset{d}{=} X$ und $\hat{Y} \overset{d}{=} Y$ (d.h. zwei *Kopien* von X und Y) mit der Eigenschaft, dass $\hat{X} \leq \hat{Y}$ ω-weise.

Lösung:

(a) Falls $F^{-1}(u) \leq x$ so gilt wegen der Monotonie von F, dass $F(F^{-1}(u)) \leq F(x)$. Die Definition von F^{-1} und die Rechtsstetigkeit von F implizieren andererseits $F(F^{-1}(u)) \geq u$, und also $u \leq F(x)$.

Falls andererseits $F(x) \geq u$, dann ist $x \in \{x' \in \mathbb{R} : F(x') \geq u\}$, und also

$$x \geq \inf\{x' \in \mathbb{R} : F(x') \geq u\} = F^{-1}(u).$$

(b) Es gilt

$$P(F^{-1}(U) \leq x) \overset{(a)}{=} P(U \leq F(x)) = F(x) = P(X \leq x)$$

was äquivalent ist zu $F^{-1}(U) \overset{d}{=} X$.

(c) Sei zunächst die Existenz von $\hat{X}, \hat{Y}$ mit $\hat{X} \overset{d}{=} X$, $\hat{Y} \overset{d}{=} Y$ und $\hat{X} \leq \hat{Y}$ gegeben. Dann gilt

$$\{\hat{Y} \leq x\} \subset \{\hat{X} \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

und also $P(\hat{Y} \leq x) \leq P(\hat{X} \leq x)$, also $G(x) \leq F(x), x \in \mathbb{R}$, was $X \overset{d}{\leq} Y$ nach sich zieht.

Umgekehrt, falls $X \overset{d}{\leq} Y$, dann $G(x) \leq F(x), x \in \mathbb{R}$, was für $u \in [0,1]$ impliziert, dass

$$\{x \in \mathbb{R} : G(x) \geq u\} \subset \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}.$$

Betrachtet man auf beiden Seiten das Infimum, so liefert das

$$F^{-1}(u) \le G^{-1}(u), \quad u \in [0,1]. \tag{1}$$

Sei nun U eine $U(0,1)$-verteilte ZV. Setze $\hat{X} := F^{-1}(U)$, $\hat{Y} := G^{-1}(U)$. Nach Teil (b) sind diese Kopien von X und Y und (1) liefert $\hat{X} \le \hat{Y}$.

Aufgabe 2

Sei $\lambda \in \Lambda$. Zeigen Sie:

(a) $\lambda^{-1} \in \Lambda$ mit $||\lambda^{-1}|| = ||\lambda||$,

(b) Ist λ stetig differenzierbar, so

$$||\lambda|| = \sup_{0<t<1} |\ln(\lambda'(t))|.$$

(Wir setzen hier $\ln(0) := -\infty$.)

(c) Ist λ stetig, aber nur stückweise stetig differenzierbar, sagen wir jeweils zwischen $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{r-1} < t_r = 1$ für ein $r \in \mathbb{N}$, so gilt

$$||\lambda|| = \max_{1\le i\le r} \left\{ \sup_{t_{i-1}<t<t_i} |\ln \lambda'(t)| \right\}$$

(d) Welche Form nimmt die Formel in Teil (c) an für stückweise affines λ?

Lösung:

(a) Um zu zeigen, dass $\lambda^{-1} \in \Lambda$ ist, genügt es zu zeigen, dass λ^{-1} strikt monoton wächst. Seien dazu $0 \le x < y \le 1$. Da λ stetig und strikt steigend ist, existieren $\tilde{x} < \tilde{y}$ mit $x = \lambda(\tilde{x})$, $y = \lambda(\tilde{y})$. Also ist

$$\lambda^{-1}(x) = \tilde{x} < \tilde{y} = \lambda^{-1}(y).$$

Ferner gilt wegen $[0,1] = \lambda([0,1])$ und $s < t \Leftrightarrow \lambda(s) < \lambda(t)$

$$\begin{aligned} ||\lambda^{-1}|| &= \sup_{0\le s<t\le 1} \left| \ln \frac{\lambda^{-1}(t) - \lambda^{-1}(s)}{t-s} \right| = \sup_{0\le \lambda(s)<\lambda(t)\le 1} \left| \ln \frac{\lambda^{-1}(\lambda(t)) - \lambda^{-1}(\lambda(s))}{\lambda(t)-\lambda(s)} \right| \\ &= \sup_{0\le s<t\le 1} \left| -\ln \frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s} \right| = ||\lambda||. \end{aligned}$$

(b) Ist λ stetig differenzierbar, so liefert der Mittelwertsatz

$$\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s} = \lambda'(\xi_{s,t})$$

mit einer Zwischenstelle $s < \xi_{s,t} < t$. Es folgt

$$||\lambda|| = \sup_{0\le s<t\le 1} |\ln(\lambda'(\xi_{s,t}))| \le \sup_{0\le t\le 1} |\ln(\lambda'(t))|,$$

denn

$$\{\xi_{s,t} : 0 \le s < t \le 1\} \subset [0,1].$$

Um Gleichheit zu zeigen, benötigen wir folgende Fallunterscheidung je nach Beschaffenheit von λ:

Fall 1: $M := \sup_{0\le t\le 1} |\ln\lambda'(t)| < \infty$. Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein t_ϵ mit

$$|\ln\lambda'(t^\epsilon)| > M - \epsilon$$

und wegen

$$|\ln\lambda'(t^\epsilon)| = \lim_{s\to t^\epsilon} \left|\ln\frac{\lambda(t^\epsilon)-\lambda(s)}{t^\epsilon - s}\right| = \lim_{s\to t^\epsilon} |\ln\lambda'(\xi_{s^\epsilon,t^\epsilon})|$$

existiert also ein s' mit

$$|\ln\lambda'(\xi_{s',t^\epsilon})| > M - \epsilon.$$

Es folgt die Gleichheit.

Fall 2: $M := \sup_{0\le t\le 1} |\ln\lambda'(t)| = \infty$. Analog zur Argumentationskette in Fall 1 zeigt man, dass dann auch

$$\sup_{0\le s<t\le 1} |\ln(\lambda'(\xi_{s,t}))| = \infty.$$

(c) Wir zeigen

$$\sup_{0\le s<t\le 1}\left|\ln\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right| = \max_{1\le i\le r}\sup_{t_{i-1}\le s<t\le t_i}\left|\ln\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right|.$$

Die Behauptung folgt dann aus (b). " $\ge$ " ist klar. Um die umgekehrte Ungleichung zu sehen, seien $s,t\in[0,1]$ und $t_k < ... < t_l$ dazwischen. Dann ist klar (Skizze!), dass $\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}$ nach oben durch

$$M_{s,t} := \max\left\{\frac{\lambda(t_k)-\lambda(s)}{t_k-s}, \frac{\lambda(t_{k+1})-\lambda(t_k)}{t_{k+1}-t_k}, ..., \frac{\lambda(t_l)-\lambda(t_{l-1})}{t_l-t_{l-1}}, \frac{\lambda(t)-\lambda(t_l)}{t-t_l}\right\},$$

und nach unten durch

$$m_{s,t} := \min\left\{\frac{\lambda(t_k)-\lambda(s)}{t_k-s}, \frac{\lambda(t_{k+1})-\lambda(t_k)}{t_{k+1}-t_k}, ..., \frac{\lambda(t_l)-\lambda(t_{l-1})}{t_l-t_{l-1}}, \frac{\lambda(t)-\lambda(t_l)}{t-t_l}\right\}$$

beschränkt ist. Es folgt

$$\begin{aligned}\left|\ln\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right| &\le \max\{|\ln m_{s,t}|, |\ln M_{s,t}|\}\\ &\le \max_{1\le i\le r}\sup_{t_{i-1}\le s<t\le t_i}\left|\ln\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right|\end{aligned}$$

und Supremumsbildung auf der linken Seite liefert die Behauptung.

(d) Für

$$\lambda(x) = \lambda(t_{i-1}) + \frac{\lambda(t_i)-\lambda(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}(x-t_{i-1}), \qquad \text{falls } x\in[t_{i-1},t_i]$$

folgt mit Teil (c)

$$||\lambda|| = \max_{1\le i\le r}\left\{\sup_{t_{i-1}<t<t_i}|\ln\lambda'(t)|\right\} = \max_{1\le i\le r}\left\{\left|\ln\frac{\lambda(t_i)-\lambda(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right|\right\}.$$

Aufgabe 3

(a) Sei E eine Menge und d_1, d_2 Metriken auf E mit $d_1 \leq d_2$. Zeigen Sie, dass Konvergenz bezüglich d_2 Konvergenz bezüglich d_1 nach sich zieht und dass die von d_1 induzierte Topologie $\mathcal{O}(d_1)$ gröber als die von d_2 induzierte $\mathcal{O}(d_2)$ ist, d.h. dass

$$\mathcal{O}(d_1) \subset \mathcal{O}(d_2).$$

(b) Sei d_0 die Skorohod-Metrik auf D^V und ρ die Supremumsmetrik auf D^V. Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}^V \subset \mathcal{D}^V_\rho$, aber andererseits

$$h : (D^V, d_0) \to (D^V, \rho), \quad h(f) := f$$

nicht $\mathcal{D}^V/\mathcal{D}^V_\rho$-messbar ist (also nicht $\mathcal{D}^V \supset \mathcal{D}^V_\rho$).

Lösung:

(a) Gelte $d_2(x_n, x) \to 0$ für $n \to \infty$. Dann folgt

$$0 \leq d_1(x_n, x) \leq d_2(x_n, x) \to 0.$$

Die von d_2 induzierte Topologie ist gröber als die von d_1 induzierte: Man könnte sofort mit dem genannten Konvergenzzusammenhang argumentieren - wir wollen dies jedoch hier direkt zeigen: Sei $O \in \mathcal{O}(d_1)$, d.h. für jedes $x \in O$ gibt es einen d_1-Ball $B_{d_1}(x, \epsilon) \subset O$. Wegen $d_1 \leq d_2$ gilt

$$B_{d_2}(x, \epsilon) \subset B_{d_1}(x, \epsilon),$$

und wir erhalten $B_{d_2}(x, \epsilon) \subset O$. Damit ist $O \in \mathcal{O}(d_2)$.

(b) Seien $f, g \in D^V$. Dann ist

$$d_0(f, g) = \inf\{\epsilon > 0 | \exists \lambda \in \Lambda : ||\lambda|| < \epsilon, \sup_{t \in [0,1]} v(f(t), g(\lambda(t)))\}.$$

Für $\lambda(t) := t$ ist $||\lambda|| = 0$, weshalb die Wahl von

$$\epsilon := \sup_{t \in [0,1]} v(f(t), g(t)) = \rho(f, g)$$

ein zulässiges ϵ liefert. Es folgt $d_0 \leq \rho$. Nach Teil (a) folgt, dass

$$\mathcal{O}(d_0) \subset \mathcal{O}(\rho)$$

was für die Borelschen σ-Algebren dann

$$\mathcal{D}^V \subset \mathcal{D}^V_\rho$$

bedeutet.

Wir zeigen nun für den Fall $V = \mathbb{R}$, dass diese Inklusion strikt ist. Dies können wir z.B. dadurch erreichen, dass wir eine Abbildung $\phi : [0, 1] \to D^{\mathbb{R}}$ angeben, welche zwar $\mathcal{B}([0, 1])/\mathcal{D}^V$, jedoch nicht $\mathcal{B}([0, 1])/\mathcal{D}^V_\rho$ messbar ist. Eine solche Abbildung ist

$$\phi(t) := \mathbf{1}_{[t,1]}.$$

Denn gilt $t_n \to t$ in $(0,1)$, so gibt es $\lambda_n \in \Lambda$ mit $\lim_{n\to\infty} ||\lambda_n|| = 0$ und $\lambda_n(t_n) = t$. Die Definition von d_0 liefert

$$\lim_{n\to\infty} d_0(\mathbf{1}_{[0,t_n)}, \mathbf{1}_{[0,t)}) = 0,$$

ϕ ist also stetig bezüglich d_0, insbesondere $\mathcal{B}([0,1])/\mathcal{D}^V$-messbar. Sei nun $H \subset [0,1]$ nicht messbar. Wir definieren

$$A := \bigcup_{t\in H} B_\rho\left(\phi(t), \frac{1}{2}\right) = \bigcup_{t\in H} B_\rho\left(\mathbf{1}_{[0,t)}, \frac{1}{2}\right) \subset D^V,$$

und bemerken, dass A als Vereinigung offener Mengen offen ist bezüglich ρ, insbesondere also in $\mathcal{D}_\rho^V$ liegt. Wegen

$$\phi^{-1}(A) = H \notin \mathcal{B}([0,1])$$

(man beachte, dass $\phi^{-1}\left(B_\rho\left(\mathbf{1}_{[0,t)}, \frac{1}{2}\right)\right) = t$ ist, denn das einzige Bild $\phi(s)$ in $B_\rho\left(\mathbf{1}_{[0,t)}, \frac{1}{2}\right)$ ist offensichtlich $\phi(t)$) ist ϕ nicht $\mathcal{B}([0,1])/\mathcal{D}_\rho^V$-messbar.

Aufgabe 4

Nach Theorem 9.13 ist (D^V, d_0) vollständig und nach Lemma 9.23 gilt

$$d_0(f_n, f) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad d(f_n, f) \to 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass (D, d) nicht vollständig ist.

(b) Zeigen Sie, dass falls $\{f_n\}$ d_0-Cauchyfolge ist $\{f_n\}$ auch d-Cauchyfolge ist

(c) Zeigen Sie, dass die Umkehrung in Teil (b) falsch ist. Was ist hier entscheidend?

Lösung: Die Metrik d auf D^V ist definiert via

$$d(f,g) := \inf\{\epsilon > 0 : \exists \lambda \in \Lambda : \sup_{0\le t\le 1} |\lambda(t) - t| \le \epsilon \text{ und } \sup_{0\le t\le 1} v(f(t), g(\lambda(t)))\}.$$

Nach Vorlesung induzieren d und d_0 dieselbe Topologie (Skorokhod-Topologie). Insbesondere gilt $d(f_n,f) \to 0 \Leftrightarrow d_0(f_n, f) \to 0$. Während Separabilität eine rein topologische Eigenschaft ist, welche nicht von der Metrisierung abhängt, ist Vollständigkeit eine Eigenschaft, welche wesentlich von der jeweiligen Metrisierung abhängt. Während (D, d_0) nach Theorem 9.13 vollständig ist, gilt dies für (D, d) nicht:

(a) Betrachte $f_n := \mathbf{1}_{[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n})}$. Dann gilt

$$d(f_n, f_m) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|, \quad m,n \ge 2. \quad (+)$$

Denn gälte $d(f_n, f_m) < \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$, so gäbe es ein $\lambda \in \Lambda$ so, dass sowohl

$$\sup_{0\le t\le 1} |\lambda(t) - t| < \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \qquad (*)$$

und gleichzeitig

$$\sup_{0\le t\le 1} |f_n(t) - f_m(\lambda(t))| < \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| < 1.$$

λ muss also $[0, \frac{1}{2})$ auf $[0, \frac{1}{2})$, $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n})$ auf $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{m})$ und $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$ auf $[\frac{1}{2} + \frac{1}{m}, 1]$ abbilden. Insbesondere müsste wegen der Stetigkeit und Monotonie gelten, dass

$$\lambda\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}.$$

Es folgte

$$\sup_{0\le t\le 1} |\lambda(t) - t| \ge \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|,$$

im Widerspruch zu $(*)$. Also gilt $d(f_n, f_m) \ge \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$.

Um " $\le$ " zu sehen, bemerken wir, dass $|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$ ein zulässiges ϵ in der Definition von d ist, denn das stückweise affine λ mit $\lambda(0) = 0, \lambda(1/2) = 1/2, \lambda(1/2 + 1/n) = 1/2 + 1/m$ und $\lambda(1) = 1$ erfüllt

$$\sup_{0\le t\le 1} |f_n(t) - f_m(\lambda(t))| = 0 \le \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$$

ebenso wie

$$\sup_{0\le t\le 1} |\lambda(t) - t| = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|.$$

Damit gilt $(+)$ und $\{f_n\}$ ist d-Cauchyfolge. Gäbe es nun ein $f \in D^V$ mit $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$, so gälte auch $\lim_{n\to\infty} d_0(f_n, f) = 0$ nach Lemma 9.23 und wegen Korollar 9.21 wäre dann

$$\int_0^1 f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = 0,$$

was wegen $f \ge 0$ $f = 0$ λ^1-f.ü. nach sich zieht. Wegen $f \in D^V$ wäre dann $f(t) = 0$ für $0 \le t < 1$ und ferner $f(1) = 0$ wegen $f_n(1) = 0$. Damit also $f \equiv 0$. Nach Definition von d ist dann aber $d(f_n, f) \to 0$ nicht möglich. $\{f_n\}$ hat also keinen Grenzwert in D_V bezüglich d, damit ist (D^V, d) als nicht vollständig nachgewiesen.

(b) Da (D^V, d_0) vollständig ist, existiert ein $f \in D^V$ mit $d_0(f_n, f) \to 0$. Bezüglich d gilt

$$d(f_n, f_m) \le d(f_n, f) + d(f, f_m) \to 0, \quad m, n \to \infty,$$

denn $d(f_n, f) \to 0$, wegen $d_0(f_n, f) \to 0$.

(c) Entscheidend in (b) ist die Existenz eines solchen f (also die Vollständigkeit von (D^V, d_0))! Der umgekehrte Schluss ist falsch, wie das Beispiel in Teil (a) zeigt. $\{f_n\}$ ist Cauchy bezüglich d, kann aber keine Cauchyfolge bzgl. d_0 sein, denn dann existierte ein d_0-Grenzwert f, was wie in Teil (a) gesehen nicht konsistent ist.