Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
PD. Dr. Dieter Kadelka · Daniel Gentner

Asymptotische Stochastik (SS 2010)

Übungsblatt 6

Aufgabe 1

(a) Sei $f \in C^V$ und $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Λ mit $\lim_{n\to\infty} \|\lambda_n\| = 0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \rho(f \circ \lambda_n, f) = 0.$$

(b) C^V ist abgeschlossen in D^V bzgl. der Skorokhod-Topologie.

(c) Sei $F \in \mathcal{F}(D^V_\rho)$, F^- der Abschluss von F in (D^V, d_0). Dann gilt

$$F^- \cap C^V = (F \cap C^V)^- = F \cap C^V.$$

Aufgabe 2

Weisen Sie unter den in Theorem 9.39 gemachten Voraussetzungen die Gültigkeit von (9.16) nach. (Der Nachweis von (9.17) ist im Skriptum zu finden - (9.16) kann analog nachgewiesen werden).

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass wenn V ein endlichdimensionaler normierter Vektorraum ist, man in Theorem 9.43 Bedingung (i) dadurch ersetzen kann, dass nur $(P_n^{\pi_0})_{n\in\mathbb{N}}$ eine straffe Folge von W-Maßen (auf V) ist. Warum gilt dies nicht allgemein?

Aufgabe 4

Im modifizierten Theorem von Donsker (Theorem 9.50) wird die Prozessfolge

$$\zeta_t^n(\omega) := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}(\omega), \quad S_n := \sum_{i=1}^n X_i$$

untersucht, wobei die X_i unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit $EX_n = 0$ und positiver endlicher Varianz sind. Beweisen Sie, dass die induzierte Abbildung

$$\zeta^n : \Omega \to D$$

$\mathcal{A}/\mathcal{D}_\rho$ messbar ist.

Aufgabe 5

Man beweise im modifierten Theorem von Donsker, dass $d_0(\xi^n, \chi^n)$ stochastisch gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 6

Die folgende Aufgabe begründet, warum $(\sqrt{n}\ (F_n'(t) - t))_{0\leq t\leq 1} \xrightarrow{d}_\rho W^0$ nicht gilt:
Seien $v_0, v_1 \in \mathbb{R}$ fest mit $v_0 \neq v_1$ und $\varphi\colon [0,1] \to D$ gegeben durch $\varphi(t) := v_0 1_{[0,t)} + v_1 1_{[t,1]}$, d.h. $\varphi(t)(s) = v_0$ für $s < t$ und $\varphi(t)(s) = v_1$ für $s \geq t$.
a) Begründen Sie, dass φ $\mathcal{B}^1/\mathcal{D}$-messbar ist.
b) Sei T eine beliebige Teilmenge von $[0,1]$, $\epsilon_0 := v(v_0, v_1)/2$ und

$$A(T) := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{t\in T} B_{\rho,\epsilon_0/n}(\varphi(t))$$

Zeigen Sie $A(T) \in \mathcal{D}_\rho^V$ und $T = \varphi^{-1}(A_T)$. Warum ist φ nicht $\mathcal{B}^1/\mathcal{D}_\rho$-messbar?
c) Wir nehmen jetzt der Einfachheit halber an, dass $V = \mathbb{R}$, $v_0 = 0$ und $v_1 = 1$ gilt. Sei $P := (\lambda^1)^\varphi$ die Verteilung von φ (auf $\mathcal{D}$) unter λ^1. Begründen Sie, dass P nicht zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß P^* auf $\mathcal{D}_\rho$ fortgesetzt werden kann, falls die Kontinuumshypothese gilt.
<u>Hinweis:</u> Sie dürfen verwenden, dass es kein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{P}([0,1])$ mit $\mu(\{t\}) = 0$ für alle $t \in [0,1]$ gibt, falls die Kontinuumshypothese gilt.