Institut für Stochastik
PD. Dr. Dieter Kadelka · Daniel Gentner

Asymptotische Stochastik (SS 2010)

Lösungen zu Übungsblatt 6

Aufgabe 1

(a) Sei $f \in C^V$ und $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Λ mit $\lim_{n\to\infty} \|\lambda_n\| = 0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \rho(f \circ \lambda_n, f) = 0.$$

(b) C^V ist abgeschlossen in D^V bzgl. der Skorokhod-Topologie.

(c) Sei $F \in \mathcal{F}(D^V_\rho)$, F^- der Abschluss von F in (D^V, d_0). Dann gilt

$$F^- \cap C^V = (F \cap C^V)^- = F \cap C^V.$$

Lösung:

(a) Da $[0,1]$ kompakt und f stetig ist, ist f sogar gleichmäßig stetig. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es daher ein $\delta > 0$ mit $v(f(s), f(t)) \le \epsilon$, falls $|s-t| \le \delta$. Wegen Lemma 9.8 und $\lim_{n\to\infty} \|\lambda_n\| = 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le t\le 1} |\lambda_n(t) - t| = 0$, also auch

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le t\le 1} v(f \circ \lambda_n(t), f(t)) = 0.$$

(b) Sei $f \in D^V$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in C^V mit $\lim_{n\to\infty} d_0(f_n, f) = 0$. Dann gibt es $\lambda_n \in \Lambda$ mit $\lim_{n\to\infty} \|\lambda_n\| = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \rho(f, f_n \circ \lambda_n)$. Da λ_n stetig ist, ist auch $f_n \circ \lambda_n$ stetig. f ist also gleichmäßig durch stetige Funktionen approximierbar und daher selbst stetig.

(c) Es gilt $F \cap C^V \subset F^- \cap C^V$. Da C^V d_0-abgeschlossen ist, ist auch $F^- \cap C^V$ abgeschlossen und damit $(F \cap C^V)^- \subset F^- \cap C^V$. Sei umgekehrt $f \in F^- \cap C^V$. Es gibt dann eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in F mit $\lim_{n\to\infty} d_0(f_n, f) = 0$. Nach Definition von d_0 gibt es daher eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Λ mit $\lim_{n\to\infty} \|\lambda_n\| = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n, f \circ \lambda_n) = 0$. Da f und alle λ_n stetig sind, gilt $f \circ \lambda_n \in C^V$. Wegen $f \in C^V$ und a) gilt $\lim_{n\to\infty} \rho(f \circ \lambda_n, f) = 0$, wegen der Dreiecksungleichung also auch $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$, also sogar $f \in F$, da $F \in \mathcal{F}(D^V_\rho)$. Insgesamt folgt $F^- \cap C^V \subset F \cap C^V \subset (F \cap C^V)^- \subset F^- \cap C^V$.

Aufgabe 2

Weisen Sie unter den in Theorem 9.39 gemachten Voraussetzungen die Gültigkeit von (9.16) nach. (Der Nachweis von (9.17) ist im Skriptum zu finden - (9.16) kann analog nachgewiesen werden).

Lösung: Da jedes $f \in D^V$ in 0 stetig ist, gilt für jedes $\epsilon > 0$, dass

$$\lim_{\delta\downarrow 0} P(\{f \in D^V : v(f(0), f(\delta) \ge \epsilon)\}) = 0$$

(P stetig von oben).Insbesondere exisitert für $\eta > 0$ ein $\delta_0 \in [0,1)$ mit

$$P(\{f \in D^V : v(f(0), f(\delta)) \geq \epsilon\}) \leq \eta$$

für alle $0 < \delta \leq \delta_0$. Da nach Voraussetzung $P_n^{\pi_{0,\delta}} \xrightarrow{\mathcal{D}} P^{\pi_{0,\delta}}$ falls $\delta \in T_P$ folgt mit dem Abbildungssatz und der Stetigkeit der Metrik v, dass

$$P_n^{v\circ(\pi_0,\pi_\delta)} \xrightarrow{\mathcal{D}} P^{v\circ(\pi_0,\pi_\delta)}.$$

Das Portmanteau-Theorem 3.5 liefert dann

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(\{f \in D^V : v(f(0), f(\delta)) \geq \epsilon\}) \leq P(\{f \in D^V : v(f(0), f(\delta)) \geq \epsilon\}) \leq \eta, \quad \delta \in [0,\delta_0) \cap T_P.$$

Die Dreiecksungleichung liefert uns, dass wenn $\sup_{0\leq t<\delta} v(f(0), f(\delta)) \geq 2\epsilon$, dann notwendig entweder $v(f(0), f(\delta)) \geq \epsilon$ oder $w_f^*(\delta) \geq \epsilon$ gelten muss. Dies liefert

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} P_n(\{f \in D^V : \sup_{0<t\leq\delta} v(f(t), f(\delta)) \geq 2\epsilon\}) &\leq \limsup_{n\to\infty} P_n(\{f \in D^V : v(f(0), f(\delta)) \geq \epsilon\}) + \\ &\quad \limsup_{n\to\infty} P_n(\{f \in D^V : w_f^*(\delta) \geq \epsilon\}) \\ &\leq 2\eta.\end{aligned}$$

Es folgt (9.16), denn η war beliebig.

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass wenn V ein endlichdimensionaler normierter Vektorraum ist, man in Theorem 9.43 Bedingung (i) dadurch ersetzen kann, dass nur $(P_n^{\pi_0})_{n\in\mathbb{N}}$ eine straffe Folge von W-Maßen (auf V) ist. Warum gilt dies nicht allgemein?

Lösung: Sei $(P_n^{\pi_0})_{n\in\mathbb{N}}$ straff. Da V endlichdimensional ist, sind ϵ-Bälle der Form $B(m,\epsilon) := \{v \in V : ||v - m|| \leq \epsilon\}$ kompakt. Wegen der Stetigkeit der Addition ist für zwei kompakte Mengen K und L deren Minkowskisumme $K + L := \{k + l : k \in K, l \in L\}$ wieder kompakt. Wir zeigen nun, dass unter diesen Annahmen für jedes $t \in [0,1]$ die Familie $(P_n^{\pi_t})_{n\in\mathbb{N}}$ straff sein muss. Sei dazu $t \in [0,1]$ fest gewählt und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen $K \subset V$ kompakt so, dass

$$P_n^{\pi_0}(K) = P_n(f \in D^V : f(0) \in K) \geq 1 - \epsilon/2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ferner dürfen wir wegen (ii) ein $\delta > 0$ so wählen, dass

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(\{f \in D^V : w_f(\delta) \geq \epsilon\}) \leq \epsilon/4.$$

Dann gibt es weiter ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$P_n(\{f \in D^V : w_f(\delta) \geq \epsilon\}) \leq \epsilon/2, \quad n \geq N.$$

Wir suchen eine kompakte Menge $\tilde{K} \subset V$, so dass

$$P_n^{\pi_t}(\tilde{K}) = P_n(f \in D^V : f(t) \in \tilde{K}) \geq 1 - \epsilon, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Gelte nun $f(0) \in K$ und $w_f(\delta) < \epsilon$. Zerlegen wir $[0,t]$ in Intervalle der Breite δ, so liefert die Dreiecksungleichung

$$||f(t) - f(0)|| \leq ||f(t) - f(\lfloor \frac{t}{\delta} \rfloor \delta)|| + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{t}{\delta} \rfloor} ||f(i\delta) - f((i-1)\delta)|| < (\lfloor \frac{t}{\delta} \rfloor + 1)\epsilon.$$

Also folgt $f(t) \in \bar{K}$ mit

$$\bar{K} := K + B(0, (\lfloor \frac{t}{\delta} \rfloor + 1)\epsilon).$$

Für $n \geq N$ folgt damit

$$\begin{aligned} P_n(f(t) \in \bar{K}) &\geq P_n(f(0) \in K, w_f(\delta) < \epsilon) = 1 - P_n(f(0) \notin K \vee w_f(\delta) \geq \epsilon) \\ &\geq 1 - P_n(f(0) \notin K) - P_n(w_f(\delta) \geq \epsilon) \\ &\geq 1 - \epsilon/2 - \epsilon/2 = 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

Die Straffheit der gesamten Folge $P_n^{\pi_t}$ sehen wir nun wie folgt: Da V vollständig und separabel ist, finden wir nach dem Satz von Ulam auch für $1 \leq n < N$ jeweils kompakte Mengen K_n mit

$$P_n^{\pi_t}(K_n) \geq 1 - \epsilon.$$

Die endliche Vereinigung

$$\tilde{K} := \bigcup_{n=1}^{N-1} K_n \cup \bar{K}$$

ist nun die gesuchte kompakte Menge.
Wesentlich bei dieser Argumentation ist die Kompaktheit der Epsilonbälle. Diese ist bei unendlichdimensionalem V nicht mehr gegeben.

Aufgabe 4

Im modifizierten Theorem von Donsker (Theorem 9.50) wird die Prozessfolge

$$\zeta_t^n(\omega) := \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}(\omega), \quad S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$$

untersucht, wobei die X_i unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit $EX_n = 0$ und positiver endlicher Varianz sind. Beweisen Sie, dass die induzierte Abbildung

$$\zeta^n : \Omega \to D$$

$\mathcal{A}/\mathcal{D}_\rho$ messbar ist.

Lösung: Zunächst ist die Darstellung

$$\zeta^n(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) \mathbf{1}_{[i/n,1]}$$

offensichtlich. Hier ist für jedes i dann $\mathbf{1}_{[i/n,1]} \in D$. Ferner ist für festes $f \in D$ die Abbildung $\mathbb{R} \to D, t \mapsto t \cdot f$ stetig bzgl ρ, denn

$$\rho(tf, sf) = \sup_{r\in[0,1]} |tf(r) - sf(r)| = |t-s| \sup_{r\in[0,1]} |f(r)|.$$

Die gewünschte Messbarkeit folgt nun.

Aufgabe 5

Man beweise im modifierten Theorem von Donsker, dass $d_0(\xi^n, \chi^n)$ stochastisch gegen 0 konvergiert.

Lösung: Nach Definition von ξ^n und ζ^n gilt $d_0(\xi^n, \zeta^n) \leq \rho(\xi^n, \zeta^n) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}} \cdot \max\limits_{i=1,\ldots,n-1} |X_i|$ und es reicht wegen Satz 3.22 zu zeigen, dass

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \max_{i=1,\ldots,n} |X_i| \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$$

gilt. Ist F die Verteilungsfunktion von $|X_1|$, so ist also zu zeigen, dass für alle $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} F(\sqrt{n}t)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{n \cdot (1 - F(\sqrt{n}t))}{n}\right)^n = 1$$

gilt und dies gilt genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} n \cdot (1 - F(\sqrt{n}t)) = 0$ für alle $t > 0$ gilt. Hinreichend hierfür ist $\lim_{t\to\infty} t^2 \cdot (1 - F(t)) = 0$. Zu zeigen bleibt, dass dies eine Konsequenz aus $\mathbb{E}|X_1|^2 = 2\int_0^\infty t \cdot (1 - F(t))\, dt < \infty$ ist. Andernfalls gibt es ein $\epsilon > 0$ und $t_n \uparrow \infty$ mit $t_n^2\ (1 - F(t_n)) \geq \epsilon$. Durch Übergang zu einer Teilfolge erreichen wir, dass $t_{n+1} \geq 2\ t_n$. Es gilt dann wegen $F \uparrow$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t\ (1 - F(t))\ dt &\geq \sum_{n=1}^\infty \int_{t_n}^{t_{n+1}} t\ (1 - F(t_{n+1}))\ dt \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty (1 - F(t_{n+1})) \cdot (t_{n+1}^2 - t_n^2) \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty (1 - F(t_{n+1})) \cdot \frac{3}{4}\ t_{n+1}^2 = \infty.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Die folgende Aufgabe begründet, warum $(\sqrt{n}\ (F_n'(t) - t))_{0\leq t\leq 1} \xrightarrow{d}_\rho W^0$ nicht gilt:
Seien $v_0, v_1 \in \mathbb{R}$ fest mit $v_0 \neq v_1$ und φ: $[0,1] \to D$ gegeben durch $\varphi(t) := v_0 1_{[0,t)} + v_1 1_{[t,1]}$, d.h. $\varphi(t)(s) = v_0$ für $s < t$ und $\varphi(t)(s) = v_1$ für $s \geq t$.
a) Begründen Sie, dass φ $\mathcal{B}^1/\mathcal{D}$-messbar ist.
b) Sei T eine beliebige Teilmenge von $[0,1]$, $\epsilon_0 := v(v_0, v_1)/2$ und

$$A(T) := \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{t\in T} B_{\rho,\epsilon_0/n}(\varphi(t))$$

Zeigen Sie $A(T) \in \mathcal{D}_\rho^V$ und $T = \varphi^{-1}(A_T)$. Warum ist φ nicht $\mathcal{B}^1/\mathcal{D}_\rho$-messbar?
c) Wir nehmen jetzt der Einfachheit halber an, dass $V = \mathbb{R}$, $v_0 = 0$ und $v_1 = 1$ gilt. Sei $P := (\lambda^1)^\varphi$ die Verteilung von φ (auf $\mathcal{D}$) unter λ^1. Begründen Sie, dass P nicht zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß P^* auf $\mathcal{D}_\rho$ fortgesetzt werden kann, falls die Kontinuumshypothese gilt.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass es kein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{P}([0,1])$ mit $\mu(\{t\}) = 0$ für alle $t \in [0,1]$ gibt, falls die Kontinuumshypothese gilt.

Lösung:

(a) Wegen Satz 9.20 ist φ $\mathcal{B}^1/\mathcal{D}^V$-messbar.

(b) φ ist nicht $\mathcal{B}^1/\mathcal{D}_\rho^V$-messbar: Denn sei T eine nicht messbare Teilmenge von $[0,1]$, $\epsilon_0 := v(v_0, v_1)/2$ und für $n \in \mathbb{N}$

$$A_n(T) := \bigcup_{t \in T} B_{\rho,\epsilon_0/n}(\varphi(t))$$

die Vereinigung aller bzgl. ρ offenen ϵ_0/n-Umgebungen der Punkte $\varphi(t)$, $t \in T$, also selbst wieder offen, insbesondere $A_n(T) \in D_\rho^V$. Wegen der Dreiecksungleichung sind alle $B_{\rho,\epsilon/2}(\varphi(t))$ paarweise disjunkt und es gilt

$$\varphi(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n(T) \in \mathcal{D}_\rho^V.$$

Wegen $\varphi^{-1}(\varphi(T)) = T \notin \mathcal{B}^1$ (φ ist offensichtlich injektiv) ist φ also nicht $\mathcal{B}^1/\mathcal{D}_\rho^V$ messbar.

(c) Sei $P := (\lambda^1)^\varphi$ die Verteilung (auf $\mathcal{D}$) von φ (bzgl. λ^1). Dieses P lässt sich **nicht** zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß P^* auf $\mathcal{D}_\rho$ fortsetzen, falls die Kontinuumshypothese gilt.

Denn sei P^* ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{D}_\rho$ mit $P^*|\mathcal{D} = P$. Da φ injektiv ist und weil $([0,1], \mathcal{B}^1)$ und $(D, \mathcal{D})$ Standardräume sind (vergl. Kapitel 9.1.2), gilt wegen Theorem 9.17 $\varphi([0,1]) \in \mathcal{D}$, insbesondere auch $P^*(\varphi([0,1])) = 1$ und $P^*(\varphi([0,1])^c) = 0$. Sei $\lambda^*(T) := P^*(\varphi(T))$ für beliebiges $T \subset [0,1]$. Da $\varphi\colon [0,1] \to \varphi([0,1])$ bijektiv ist, ist λ^* ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{P}([0,1])$ mit $\lambda^*|_{\mathcal{B}^1} = \lambda^1$.

Gilt die Kontinuumshypothese, so gibt es kein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{P}([0,1])$ mit $\mu(\{t\}) = 0$ für alle $t \in [0,1]$ (vergl. Jech (1978), Lemma 27.7). λ^* wäre ein derartiges Maß.