Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
JProf. Dr. Luitgard Veraart · Daniel Gentner

Finanzmathematik in stetiger Zeit (SS 2010)

Lösungen zu Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (Geometrische Brownsche Bewegung)

Für $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ und eine (Standard-) Brownsche Bewegung W definieren wir die **geometrische Brownsche Bewegung** $W^{\mu,\sigma}$ als

$$W_t^{\mu,\sigma} := \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right), \quad t \geq 0.$$

(a) Finden Sie eine stochastische Differentialgleichung, welcher $W_t^{\mu,\sigma}$ genügt, indem Sie die mehrdimensionale Itô-Doeblin-Formel auf eine geeignete Funktion anwenden.

(b) Verwenden Sie die (eindimensionale) Itô-Doeblin-Formel, um die Momente $\mathbb{E}[(W_t^{\mu,\sigma})^n], n \in \mathbb{N}$, zu berechnen.

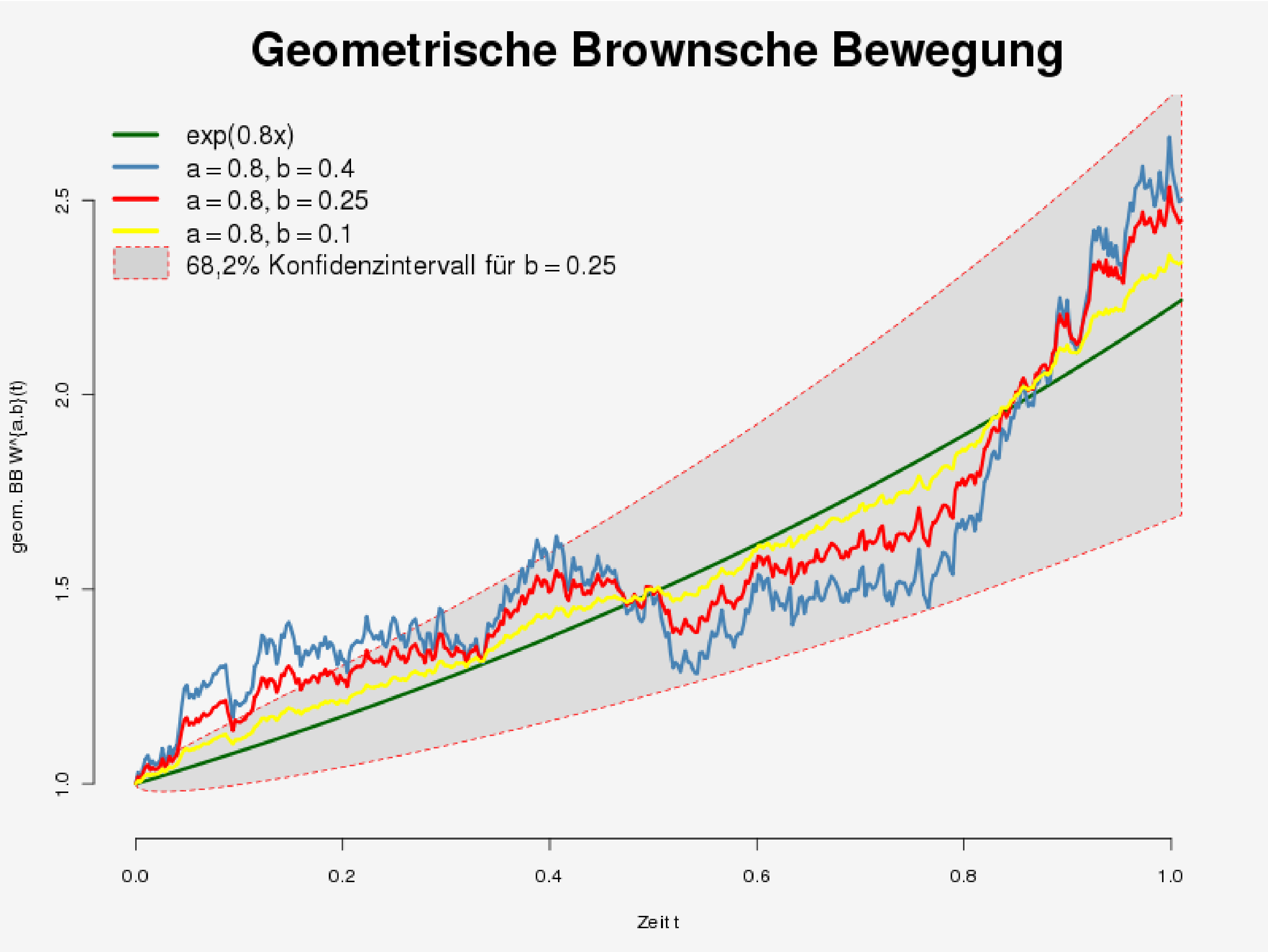
(c) Der Kursverlauf einer Aktie sei gegeben durch die stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t),$$

während ein deterministischer Bond B_t durch die gewöhnliche DGL

$$dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1$$

gegeben sei ($r > 0$ fest). Berechnen Sie die Dynamik $d\left(\frac{S_t}{B_t}\right)$ von $\left(\frac{S_t}{B_t}\right)$ mittels Produktregel.



Lösung zu (b)**:**

(b) Wenden wir die Itô-Doeblin-Formel auf die Funktion $f(x) = x^n$ und den Prozess $S_t := W_t^{\mu,\sigma}$ an, so erhalten wir

$$S_t^n = S_0^n + \int_0^t S_s^n(n\mu + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2)ds + n\int_0^t \sigma S_s^n dW_s.$$

Erwartungswertbildung liefert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_t^n] - \mathbb{E}[S_0^n] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t S_s^n(n\mu + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2)ds\right] + \mathbb{E}\left[n\int_0^t \sigma S_s^n dW_s\right] \\ &= \int_0^t \mathbb{E}\left[S_s^n\right](n\mu + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2)ds + 0\end{aligned}$$

Setzen wir nun $h(t) := \mathbb{E}[S_t^n]$ und leiten beide Seiten ab, so erhalten wir folgendes AWP:

$$h'(t) = h(t)(n\mu + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2), \quad h(0) = 1.$$

Dieses besitzt offenbar die eindeutig bestimmte Lösung

$$h(t) = \mathbb{E}[S_t^n] = \exp((n\mu + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2)t).$$

Aufgabe 4 (Vasicek-SDGL)

Es sei $c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ fest gewählt und (W_t) eine (Standard-)Brownsche Bewegung. Betrachten Sie den stochastischen Prozess

$$dr_t = (\alpha - \beta r_t)dt + \gamma dW_t, \quad r_0 = c.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $t \geq 0$ r_t die Verteilung

$$r_t \sim \mathcal{N}\left(\frac{\alpha}{\beta} + \exp(-\beta t)\left(r_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right), \frac{\gamma^2}{2\beta}(1 - \exp(-2\beta t))\right)$$

besitzt.

Lösung: Vergleiche die Dynamik von r mit der SDGL aus Aufgabe 3 (a): Es gilt $X = r$, $x_0 = r_0$, $\mu = -\beta$, $\nu = \alpha$, $\lambda = 0$ und $\sigma = \gamma$. Da $x_0 = r_0 \in \mathbb{R}$ und für alle $t \geq 0$ jeweils $\int_0^t |\mu_s| + |\nu_s| ds = (\alpha + \beta)t < \infty$ und $\int_0^t |\lambda_s|^2 + |\sigma_s|^2 ds = \gamma^2 t < \infty$ gilt, sowie alle Prozesse als Konstanten progressiv messbar sind, findet man für $t \geq 0$ mit Satz 2.6.14 bzw. Aufgabe 3 (a)

$$\begin{aligned}
Z_t &= \mathcal{E}\left(\int_0^t -\beta ds + \int_0^t 0 dW_s\right) \\
&= \exp(-\beta t), \\
r_t &= \exp(-\beta t)\left(r_0 + \underbrace{\int_0^t \exp(\beta s)(\alpha - 0)\, ds}_{=\frac{\alpha}{\beta}(\exp(\beta t)-1)} + \int_0^t \exp(\beta s)\gamma dW_s\right) \\
&= \underbrace{\frac{\alpha}{\beta} + \exp(-\beta t)\left(r_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}_{=:D(t)} + \underbrace{\int_0^t \exp(-\beta t)\exp(\beta s)\gamma dW_s}_{=:M(t)}.
\end{aligned}$$

Der einzig zufällige Term $M(t)$ ist als Integral bezüglich einer Brownschen Bewegung zunächst einmal eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0, wie wir in Übungsblatt 4/5, Aufgabe 3 gezeigt haben. r ist als Summe des deterministischen Terms $D(t)$ und der normalverteilten Zufallsvariable $M(t)$ selbst wieder normalverteilt. Die charakterisierenden Parameter Erwartungswert und Varianz sind dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[r_t] &= D(t) \\
&= \frac{\alpha}{\beta} + \exp(-\beta t)\left(r_0 - \frac{\alpha}{\beta}\right),
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(r_t) &= \mathbb{E}(r_t - \mathbb{E}r_t)^2 \\
&= \mathbb{E}\left[M(t)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t (\exp(-\beta t)\exp(\beta s)\gamma)^2 \, d\langle W\rangle_s\right] \\
&= \exp(-2\beta t)\gamma^2 \left[\frac{1}{2\beta}\exp(2\beta s)\right]_{s=0}^t \\
&= \frac{\gamma^2}{2\beta}(1 - \exp(-2\beta t)),
\end{aligned}$$

wobei zur Bestimmung von $\mathbb{E}[M(t)^2]$ Itô´s Isometrie verwendet wurde.