Finanzmathematik in stetiger Zeit (SS 2010)

Lösungen zu Übungsblatt 4 und 5

Aufgabe 4 (Anwendungen der Itô-Formel)
Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine (eindimensionale) Brownsche Bewegung und $X := (X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges Semimartingal.

(a) Berechnen Sie das Integral $\int_0^t W_s dW_s$ auf (nicht elementare) Weise.

(b) Angenommen, X ist $\mathbb{P}$-f.s. zu jeder Zeit größer null. Wenden Sie die Itô-Doeblin-Formel auf X und die Funktion $f(x) = 1/x^2$ an.

(c) Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehung

$$\int_0^t W_s^n dW_s = \frac{1}{n+1} W_t^{n+1} - \frac{n}{2} \int_0^t W_s^{n-1} ds, \quad \forall t \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

(d) Finden Sie eine geeignete Funktion $f \in C^2(\mathbb{R})$, die Sie auf den Prozess $W^2 := (W_t^2)_{t\geq 0}$ anwenden können, um die Darstellung

$$\left\langle W^2 \right\rangle_t = W_t^4 - 2 \int_0^t W_s^2 dW_s^2, \quad \forall t \geq 0$$

der quadratischen Variation von W^2 zu erhalten.

Lösung:

(a) Mit der Produktregel aus Satz 2.6.2 der Vorlesung erhält mann für $X := Y := W$

$$\begin{aligned} W_t^2 &= \int_0^t W_s dW_s + \int_0^t W_s dW_s + \langle W, W \rangle_t \\ &= 2 \cdot \int_0^t W_s dW_s + t \end{aligned}$$

und also

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}\left(W_t^2 - t\right), \quad \mathbb{P}\text{-f.s. } \forall t \geq 0.$$

Eine weitere Möglichkeit bietet die Itô-Doeblin-Formel, angewandt auf die Funktion $f(x) = x^2$:

$$\begin{aligned} dW_t^2 &= df(W_t) \\ &= f'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t) d\langle W \rangle_t \\ &= 2W_t dW_t + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot dt \quad \Longleftrightarrow \\ \int_0^t W_s dW_s &= \frac{1}{2}\left(W_t^2 - t\right) \mathbb{P}\text{-f.s. } \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

(b) Sei weiter $X_t > 0$ $\mathbb{P}$-f.s. $\forall t \geq 0$. Mit $f(x) := x^{-2}$ erhält man die Ableitungen $f'(x) = -2x^{-3}$ und $f''(x) = 6x^{-4}$. Daher folgt durch direkte Anwendung der Itô-Doeblin-Formel

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X\rangle_s \\ &= \frac{1}{X_0^2} - \int_0^t 2X_s^{-3}\mu_s ds - \int_0^t 2X_s^{-3}\sigma_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t 6X_s^{-4}\sigma_s^2 ds \\ &= X_0^{-2} + \int_0^t X_s^{-4}\left(3\sigma_s^2 - 2X_s\mu_s\right)ds - \int_0^t 2X_s^{-3}\sigma_s dW_s \quad \mathbb{P}\text{-f.s. } \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

In Differentialschreibweise:

$$df(X_t) = X_t^{-4}\left(3\sigma_t^2 - 2X_t\mu_t\right)dt - 2X_t^{-3}\sigma_t dW_t \quad \mathbb{P}\text{-f.s. } \forall t \geq 0.$$

(c) Wähle $f(x) := x^m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, und erhalte $\mathbb{P}$-f.s.

$$\begin{aligned} dW_t^m &= df(W_t) \\ &= mW_t^{m-1}dW_t + \frac{1}{2}m(m-1)W_t^{m-2}d\langle W\rangle_t \\ &= mW_t^{m-1}dW_t + \frac{m(m-1)}{2}W_t^{m-2}dt, \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

Da weiter $\mathbb{P}$-f.s. $W_0 = 0$ gilt, erhält man mit Indexverschiebung $n := m-1$ im letzten Schritt die gewünschte Aussage:

$$W_t^m - \frac{m(m-1)}{2}\int_0^t W_s^{m-2}ds = m\int_0^t W_s^{m-1}dW_s \quad \Longleftrightarrow$$

$$\int_0^t W_s^n dW_s = \frac{1}{n+1}W_t^{n+1} - \frac{n}{2}\int_0^t W_s^{n-1}ds \quad \mathbb{P}\text{-f.s. } \forall t \geq 0.$$

(d) Wähle $f(x) := x^2$:

$$f(W_t^2) = f(W_0^2) + \int_0^t 2W_s^2 dW_s^2 + \frac{1}{2}\int_0^t 2d\left\langle W^2\right\rangle_s \quad \Longleftrightarrow$$

$$\left\langle W^2\right\rangle_t = W_t^4 - 2\int_0^t W_s^2 dW_s^2 \quad \mathbb{P}\text{-f.s. } \forall t \geq 0,$$

denn sowohl W_t^4 als auch $\left\langle W^2\right\rangle_t$ verschwinden $\mathbb{P}$-f.s. in $t = 0$.