Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
JProf. Dr. Luitgard Veraart · Daniel Gentner

Finanzmathematik in stetiger Zeit (SS 2010)

Lösung zu Übungsblatt 2, Aufgabe 4

Aufgabe 4 (Warum definiert man Integrale bzgl. Brownschen Bewegungen nur so kompliziert...?)
Sei X ein lokales Martingal mit stetigen Pfaden. Auf einem Intervall $[a, b]$ könnte man versuchen, das stochastische Interal bzgl. X schlicht mit Hilfe einer immer feiner werdenden Folge von Partitionen π_n von $[a, b]$ zu definieren, nämlich als Grenzwert

$$\int_a^b H_t dX_t := \lim_{n\to\infty} \sum_{t_k, t_{k+1} \in \pi_n} H_{t_k}(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}),$$

in der Hoffnung, dass dieser ω-weise existiert. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Banach-Steinhaus, dass für jede rechts-stetige Funktion g aus der Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t_k, t_{k+1} \in \pi_n} h(t_k)(g(t_{k+1}) - g(t_k)),$$

für alle stetigen Funktionen h folgt, dass g endliche Variation auf $[a, b]$ hat. Nun liefert uns Satz 2.4.6 der Vorlesung, dass obiger zufälliger Grenzwert für nicht zeitlich konstante X nicht existieren kann. Zeigen Sie ferner, dass für solche X auch keine Konvergenz in Wahrscheinlichkeit vorliegen kann.

Lösung: Wir wiederholen kurz den Satz von Banach und Steinhaus (= Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). Sei X ein Banachraum und Y ein normierter linearer Raum. Ist $(T_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Familie beschränkter (äquivalent stetiger) linearer Operatoren $T : X \to Y$, und ist für jedes $x \in X$ die Menge $\{T_\alpha x : \alpha \in I\}$ beschränkt, so besagt dieser, dass es ein $c > 0$ gibt mit

$$\|T_\alpha\| \leq c, \quad \alpha \in I.$$

Wir setzen nun die Existenz der in der Aufgabe genannten Grenzwerte für festes g und alle stetigen Funktionen h voraus. Dann sei X der Banachraum aller stetigen Funktionen auf $[a, b]$ bzgl. Supremumsnorm und $Y = \mathbb{R}$ mit $\|\cdot\| := |\cdot|$. Definiere die linearen Operatoren $T_n : X \to Y$ durch

$$T_n(h) := \sum_{t_k, t_{k+1} \in \pi_n} h(t_k)(g(t_{k+1}) - g(t_k)).$$

Wählen wir zu festem n ein $h \in X$ so, dass $\|h\| = 1$ und $h(t_k) = \text{sign}(g(t_{k+1}) - g(t_k))$ gilt, so folgt

$$T_n(h) = \sum_{t_k, t_{k+1} \in \pi_n} |g(t_{k+1}) - g(t_k)|,$$

und also

$$\sum_{t_k, t_{k+1} \in \pi_n} |g(t_{k+1}) - g(t_k)| \leq \|T_n\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nach Voraussetzung existieren für jedes $h \in X$ die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} T_n(h)$, weshalb die Mengen $\{T_n(h) : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt sind. Der Satz von BS liefert nun $\sup \|T_n\| < \infty$, und obige Ungleichung dann

$$V_{[a,b]}g \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty.$$

g ist also von endlicher Variation. Im stochastischen Fall müsste $M(\omega, \cdot)$ für jedes $\omega \in \Omega$ also endliche Variation haben, und Satz 2.4.6 der Vorlesung schließt damit alle nicht zeitlich konstanten lokalen Martingale aus. (Für diese sind die obigen Grenzwerte also nicht existent!) Man könnte nun zumindest hoffen, dass alle zufälligen Summen der Form

$$S_n := \sum_{t_k, t_{k+1} \in \pi_n} H_{t_k}(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})$$

für Prozesse H mit stetigen Pfaden und stetige lokale Martingale X zumindest in Wahrscheinlichkeit konvergieren. Wir zeigen nun, dass auch dies nicht der Fall ist. Sei $B \subset \Omega$ das Ereignis, dass X nicht von beschränkter Variation ist. Gelte $\mathbb{P}(B) > 0$. Nach oben Bewiesenem muss es nun einen Prozess H geben mit stetigen Pfaden, so dass

$$S_n := \sum_{t_k, t_{k+1} \in \pi_n} H_{t_k}(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})$$

nicht konvergiert. Man kann sich überlegen, dass dies hier nur dann der Fall sein kann, wenn es entweder eine Teilfolge dieser Summen gibt, welche f.s. gegen ∞ bestimmt divergiert oder eine Teilfolge, welche fast sicher gegen $-\infty$ konvergiert. Konvergiert S_n auf B in Wahrscheinlichkeit gegen einen Grenzwert S, so muss dieser auf B also gleich $\pm\infty$ sein und es gälte für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(|S_n - S| \geq \epsilon) \geq \mathbb{P}(B) > 0.$$

Es kann also keine Konvergenz in Wahrscheinlichkeit vorliegen.