Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Stochastik
JProf. Dr. Luitgard Veraart · Daniel Gentner

Finanzmathematik in stetiger Zeit (SS 2010)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (Eigenschaften Gaussscher Prozesse und Brownscher Bewegungen)

Ein reellwertiger Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ heißt *Gaussscher Prozess*, falls die Zufallsvariable $c_1 X_{t_1} + \cdots + c_n X_{t_n}$ stets normalverteilt ist für beliebige Wahlen von n, c_i, t_i. Es sei W eine Brownsche Bewegung in $\mathbb{R}$ (W ist damit ein spezieller Gaussscher Prozess!). Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) Für $s > 0$ ist $(W_{t+s} - W_s)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung unabhängig von $\sigma(W_u : 0 \leq u \leq s)$. (Zeithomogenität)

(b) Zu $c > 0$ ist $cW_{\frac{t}{c^2}}$ eine Brownsche Bewegung. (Skalierungseigenschaft)

(c) Die Verteilung eines Gaussschen Prozesses X wird durch $t \mapsto \mathbb{E}X_t$ und $(s,t) \mapsto \mathrm{Cov}(X_s, X_t)$ bereits eindeutig festgelegt.

(d) Der zeitinvertierte Prozess $X_0 := 0, X_t := tW_{\frac{1}{t}}, t > 0$ ist eine Brownsche Bewegung. (Zeitinversionseigenschaft)

Hinweise: (a),(b): Definition nachprüfen, (c): Cramér-Wold, endlichdimensionale Verteilungen von X, (d): verwende (c)

Aufgabe 2 (Modifikationen und Ununterscheidbarkeit)

Zeigen Sie: Sind X und Y zwei reellwertige Prozesse und Modifikationen voneinander mit rechtsstetigen Pfaden, so sind X und Y ununterscheidbar.

Aufgabe 3 (Stoppzeiten)

(a) Es sei τ eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration auf $\mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass τ eine Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ ist genau dann wenn $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(b) Sei τ nun eine reellwertige $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$-Stoppzeit. Bekanntlich modelliert die σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ all diejenigen Ereignisse, zu welchen am Zeitpunkt t entschieden werden kann, ob sie eingetreten sind oder nicht. Analog definieren wir

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, t \in I\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_\tau$ eine σ-Algebra ist und begründen Sie die Zweckmäßigkeit dieser Definition.

Im Weiteren seien τ, σ reellwertige Stoppzeiten bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$.

(c) $\tau \wedge \sigma := \min\{\tau, \sigma\}$, $\tau \vee \sigma := \max\{\tau, \sigma\}$ und $\tau + \sigma$ sind wieder Stoppzeiten bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$.

(d) Aus $\tau \leq \sigma$ folgt $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$.

(e) Aus $A \in \mathcal{F}_\tau$ folgt $A \cap \{\tau \leq \sigma\} \in \mathcal{F}_\sigma$.

Aufgabe 4 (Martingale)

(a) W sei reellwertige Brownsche Bewegung. Beweisen Sie, dass sowohl $(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$, als auch $\exp(-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t)_{t\geq 0}, \sigma \in \mathbb{R}$, Martingale bzgl. der natürlichen Filtration sind.

(b) $(N_t, \mathcal{F}_t)$ sei ein homogener Poissonprozess mit Intensität $\lambda > 0$ auf $[0, \infty)$. Zeigen Sie, dass der kompensierte Poissonprozess $M_t := N_t - \lambda t$ ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)$ ist.

Hinweis: Sie dürfen für (a) ohne Nachweis verwenden, dass zu $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ die momenterzeugende Funktion $t \mapsto \mathbb{E}\exp(tX)$ durch $t \mapsto \exp(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2})$ gegeben ist.