Finanzmathematik in stetiger Zeit (SS 2010)

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (Optional Sampling & Anwendung)

(a) Zeigen Sie folgende Version des Optional Sampling Theorems: Ist $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal mit rechtsstetigen Pfaden und τ eine zugehörige Stoppzeit, so dass $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$, $\mathbb{E}|X_\tau| < \infty$ und $\int_{\{\tau > r\}} |X_r| d\mathbb{P} \to 0, r \to \infty$, so folgt $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$.

Es seien nun $a < 0 < b$, B_t eine Brownsche Bewegung in $\mathbb{R}$ und $\tau := \inf\{t : B_t \notin [a,b]\}$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$M := \left(e^{-\frac{1}{2}\theta^2 t} \cosh\left(\theta B_t - \theta \frac{a+b}{2}\right)\right)_{t\geq 0}$$

ein Martingal ist.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von $(a), (b)$, dass

$$\mathbb{E}\left[e^{-\frac{1}{2}\theta^2 \tau}\right] = \frac{\cosh(-\theta\frac{a+b}{2})}{\cosh(\theta\frac{b-a}{2})}.$$

Aufgabe 2 (zufällige Riemannsummen & Integration bzgl. FV-Prozessen)

(a) Sei A ein FV-Prozess und H ein Prozess mit stetigen Pfaden. Sei π_n eine Folge von zufälligen Partitionen von $[0,t]$ mit $\delta(\pi_n) \to 0, n \to \infty$. Dann gilt (wobei stets $T_k \leq S_k \leq T_{k+1}$)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{T_k, T_{k+1} \in \pi_n} H_{S_k}(A_{T_{k+1}} - A_{T_k}) = \int_0^t H_s dA_s \quad \text{f.ü.}$$

(b) Sei A ein FV Prozess mit stetigen Pfaden und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann $(f(A_t))_{t\geq 0}$ ein FV-Prozess ist und dass gilt:

$$f(A_t) - f(A_0) = \int_0^t f'(A_s) dA_s.$$

(c) Sei g stetig und $h(t) = \int_0^t g(u)du$. Sei weiter A ein FV-Prozess mit stetigen Pfaden. Dann gilt

$$h(A_t) - h(A_0) = \int_{A_0}^{A_t} g(u)du = \int_0^t g(A_s) dA_s.$$

Aufgabe 3 (Kompensierter Poissonprozess)

(a) Sei N ein homogener Poisson Prozess mit Intensität $\lambda > 0$. Berechnen Sie für $t > 0$ die Totalvariation $V_{[0,t]}N$ und folgern Sie, dass der kompensierte Poissonprozess $M_t := N_t - \lambda t$ ein FV-Prozess ist.

(b) Sei $(H)_{t\geq 0}$ ein beschränkter Prozess. Berechnen Sie

$$I_t := \int_0^t H_s dM_s.$$

Zeigen Sie, dass wenn H adaptiert ist und stetige Pfade hat, I ein Martingal ist.

Aufgabe 4 (Warum definiert man Integrale bzgl. Brownschen Bewegungen nur so kompliziert...?)

Sei X ein lokales Martingal mit stetigen Pfaden. Auf einem Intervall $[a, b]$ könnte man versuchen, das stochastische Interal bzgl. X schlicht mit Hilfe einer immer feiner werdenden Folge von Partitionen π_n von $[a, b]$ zu definieren, nämlich als Grenzwert

$$\int_a^b H_t dX_t := \lim_{n\to\infty} \sum_{t_k,t_{k+1}\in\pi_n} H_{t_k}(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}),$$

in der Hoffnung, dass dieser ω-weise existiert. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Banach-Steinhaus, dass für jede rechts-stetige Funktion g aus der Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t_k,t_{k+1}\in\pi_n} h(t_k)(g(t_{k+1}) - g(t_k)),$$

für alle stetigen Funktionen h folgt, dass g endliche Variation auf $[a, b]$ hat. Nun liefert uns Satz 2.4.6 der Vorlesung, dass obiger zufälliger Grenzwert für nicht zeitlich konstante X nicht existieren kann. Zeigen Sie ferner, dass für solche X auch keine Konvergenz in Wahrscheinlichkeit vorliegen kann.