Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
JProf. Dr. Luitgard Veraart · Daniel Gentner

Finanzmathematik in stetiger Zeit (SS 2010)

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (p-Variation und Brownsche Bewegung)
Es sei (X_t) ein stetiger Prozess. Für $p > 0$ definieren wir auf dem Intervall $[0, t]$ mittels einer Partition $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = t\}$ die *p-Variation $V^{(p)}_{[0,t]}(X, \pi)$ von X bzgl. π* durch

$$V^{(p)}_{[0,t]}(X, \pi) := \sum_{t_k, t_{k+1}} |X_{t_k} - X_{t_{k+1}}|^p,$$

und, im Falle der Existenz, die p-Variation von X auf $[0, t]$

$$V^{(p)}_{[0,t]}(X) := \lim_{\delta(\pi)\to 0} V^{(p)}_{[0,t]}(X, \pi), \quad \text{in Wahrscheinlichkeit.}$$

(a) Wir setzen voraus, dass es für jedes feste $t > 0$ ein $p > 0$ gibt, so dass

$$V^{(p)}_{[0,t]}(X, \pi) \xrightarrow{\mathbb{P}} L_t, \quad \delta(\pi) \to 0,$$

wobei L_t eine Zufallsvariable mit Werten in $[0, \infty)$ ist. Es ist zu zeigen, dass für ein festes t mit zugehörigem p für jedes $q > p$

$$V^{(q)}_{[0,t]}(X, \pi) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad \delta(\pi) \to 0,$$

und für jedes $0 < q < p$ hingegen auf $\{L_t > 0\}$

$$V^{(q)}_{[0,t]}(X, \pi) \xrightarrow{\mathbb{P}} \infty, \quad \delta(\pi) \to 0.$$

(b) Folgen Sie aus Satz 2.4.9 der Vorlesung, dass für jedes stetige lokale Martingal die quadratische Variation die einzige p-Variation ist, welche verschieden von 0 und ∞ sein kann.

(c) Berechnen Sie für die Brownsche Bewegung alle p-Variationen.

Aufgabe 2 (Quadratische Kovariation)
Seien X, Y stetige lokale Martingale. Zeigen Sie, dass es einen bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmten stetigen Prozess $< X, Y >$ gibt, so dass

$$XY- < X, Y >$$

ein lokales Martingal ist. Dies ist der *quadratische Kovariationsprozess* von X, Y. Zeigen Sie, dass $(X, Y) \mapsto < X, Y >$ bilinear und symmetrisch ist, und ferner, dass $< X >=< X, X >$.

Aufgabe 3 (Variantionen der quadratischen Variation)
Sei X ein stetiges lokales Martingal und $< X >$ der zugehörige Klammerprozess. Berechnen Sie für festes $t > 0$ den A usdruck $V^{(p)}_{[0,t]}(< X >)$ für alle $0 < p < \infty$.

Aufgabe 4 (Elementarfunktionen)
Zeigen Sie, dass für $H \in \mathcal{L}_0$ und $X \in c\mathcal{M}^2_0([0, T])$ das stochastische Integral $(H \cdot X)_t$ für jedes $t \geq 0$ nicht von der Darstellung von H abhängt.