Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
JProf. Dr. Luitgard Veraart · Daniel Gentner

Finanzmathematik in stetiger Zeit (SS 2010)

Übungsblatt 4 und 5

Aufgabe 1 (Eigenschaften des Stochastischen Integrals)
Es sei $X, \tilde{X} \in c\mathcal{M}_0^2([0,T])$ und $H \in L_X^2([0,T])$, $\tilde{H} \in L_{\tilde{X}}^2([0,T])$. Zeigen Sie für $0 \leq s < t < \infty$

$$\mathbb{E}\left(((H \cdot X)_t - (H \cdot X)_s)((\tilde{H} \cdot \tilde{X})_t - (\tilde{H} \cdot \tilde{X})_s)|\mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(\int_s^t H_u \tilde{H}_u d < X, \tilde{X} >_u |\mathcal{F}_s\right)$$

und leiten Sie ab:

$$< H \cdot X, \tilde{H} \cdot \tilde{X} >_t = \int_0^t H_u \tilde{H}_u d < X, \tilde{X} >_u .$$

(Insbesondere gelten alle Eigenschaften aus Satz 2.5.4 für das Stochastische Integral im o.g. Setting!)
Hinweis: Beweisen Sie die Aussage zunächst für $X = \tilde{X}, H = \tilde{H}$.

Aufgabe 2 (Fisk-Stratonovich Integral und Rückwärts-Itô-Integral)
W sei Brownsche Bewegung in $\mathbb{R}$ und $\epsilon \in [0,1]$. Ist $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = t\}$ eine Partition von $[0,t]$, so betrachten wir Summen der Form

$$S_\epsilon(\pi) := \sum_{i=0}^{n-1}((1-\epsilon)W_{t_i} + \epsilon W_{t_{i+1}})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

Zeigen Sie, dass

$$S_\epsilon(\pi) \xrightarrow{L^2} \frac{1}{2}W_t^2 + (\epsilon - \frac{1}{2})t, \quad \delta(\pi) \to 0.$$

Bemerken Sie, dass die rechte Seite genau dann ein Martingal ist, falls $\epsilon = 0$ (*gewöhnliches Itô-Integral*). Die Wahl von $\epsilon = \frac{1}{2}$ hat den Vorteil, dass eine ähnliche Formel wie in der gewöhnlichen Riemann-Integrationstheorie gilt, nämlich $\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}W_s^2$ (*Fisk-Stratonovich Integral*). Die Wahl von $\epsilon = 1$ entspricht dem *Rückwärts-Itô-Integral*.

Aufgabe 3 (Normalverteilung des Itô-Integrals)
Sei W eine Brownsche Bewegung und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$(f \cdot W)_t = \int_0^t f(s) dW_s$$

für jedes feste $t \geq 0$ normalverteilt ist und bestimmen Sie die Parameter der Verteilung.Bestimmen Sie ferner die Verteilung von $(W \cdot W)_t$.
Hinweis: Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion von $(f \cdot W)_t$.

Aufgabe 4 (Anwendungen der Itô-Formel)
Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine (eindimensionale) Brownsche Bewegung und $X := (X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges Semimartingal.

(a) Berechnen Sie das Integral $\int_0^t W_s dW_s$ auf (nicht elementare) Weise.

(b) Angenommen, X ist $\mathbb{P}$-f.s. zu jeder Zeit größer null. Wenden Sie die Itô-Doeblin-Formel auf X und die Funktion $f(x) = 1/x^2$ an.

(c) Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehung

$$\int_0^t W_s^n dW_s = \frac{1}{n+1} W_t^{n+1} - \frac{n}{2} \int_0^t W_s^{n-1} ds, \quad \forall t \geq 0.$$

(d) Finden Sie eine geeignete Funktion $f \in C^2(\mathbb{R})$, die Sie auf den Prozess $W^2 := (W_t^2)_{t \geq 0}$ anwenden können, um die Darstellung

$$\left\langle W^2 \right\rangle_t = W_t^4 - 2 \int_0^t W_s^2 dW_s^2, \quad \forall t \geq 0$$

der quadratischen Variation von W^2 zu erhalten.