Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
JProf. Dr. Luitgard Veraart · Daniel Gentner

Finanzmathematik in stetiger Zeit (SS 2010)

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (Geometrische Brownsche Bewegung)

Für $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ und eine (Standard-) Brownsche Bewegung W definieren wir die **geometrische Brownsche Bewegung** $W^{\mu,\sigma}$ als

$$W_t^{\mu,\sigma} := \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right), \quad t \geq 0.$$

(a) Finden Sie eine stochastische Differentialgleichung, welcher $W_t^{\mu,\sigma}$ genügt, indem Sie die mehrdimensionale Itô-Doeblin-Formel auf eine geeignete Funktion anwenden.

(b) Verwenden Sie die (eindimensionale) Itô-Doeblin-Formel, um die Momente $\mathbb{E}[(W_t^{\mu,\sigma})^n], n \in \mathbb{N}$, zu berechnen.

(c) Der Kursverlauf einer Aktie sei gegeben durch die stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t),$$

während ein deterministischer Bond B_t durch die gewöhnliche DGL

$$dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1$$

gegeben sei ($r > 0$ fest). Berechnen Sie die Dynamik $d\left(\frac{S_t}{B_t}\right)$ von $\left(\frac{S_t}{B_t}\right)$ mittels Produktregel.

Aufgabe 2 (Satz von Lévy)

Beweisen Sie den Satz von Lévy, also die Aussage, dass ein stetiges lokales Martingal X mit $X_0 = 0$ und $\langle X \rangle_t = t, t \geq 0$ eine Brownsche Bewegung ist. Betrachten Sie hierzu die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, \ (t, x) \mapsto \exp(i\theta x + \frac{1}{2}\theta^2 t) = \exp(\frac{1}{2}\theta^2 t)\cos(\theta x) + i\exp(\frac{1}{2}\theta^2 t)\sin(\theta x),$$

$\theta \in \mathbb{R}$. Wenden Sie die 2-dim. Itô -Doeblin-Formel auf Real- und Imaginärteil an. Zeigen Sie, dass $\forall 0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(i\theta(X_t - X_s)\right) | \mathcal{F}_s\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\theta^2(t - s)\right)$$

und leiten Sie daraus die Aussage her.

Aufgabe 3 (Lösen einer Stochastischen DGL)

(a) Es sei $W = (W_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, $x \in \mathbb{R}$, $\mu, \nu, \lambda, \sigma$ seien reellwertige, progressiv-messbare Prozesse mit $\lambda, \sigma \in H_W^2$ und

$$\int_0^t |\mu_s| + |\nu_s| ds < \infty, \quad \mathbb{P}\text{-f.s..}, \forall t \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = (\mu_t X_t + \nu_t)dt + (\lambda_t X_t + \sigma_t)dW_t, \quad X_0 = x$$

die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} X_t &= Z_t \left(x + \int_0^t \frac{1}{Z_s}(\nu_s - \lambda_s \sigma_s) ds + \int_0^t \frac{\sigma_s}{Z_s} dW_s \right), \\ Z_t &= \mathcal{E}\left(\int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \lambda_s dW_s \right) \end{aligned}$$

besitzt.

(b) Lösen Sie die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x,$$

für Konstanten α, σ, x und W Brownsche Bewegung. Berechnen Sie $\mathbb{E}(X_t)$ und $\mathrm{Var}(X_t)$

Aufgabe 4 (Vasicek-SDGL)

Es sei $c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ fest gewählt und (W_t) eine (Standard-)Brownsche Bewegung. Betrachten Sie den stochastischen Prozess

$$dr_t = (\alpha - \beta r_t)dt + \gamma dW_t, \quad r_0 = c.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $t \geq 0$ r_t die Verteilung

$$r_t \sim \mathcal{N}\left(\frac{\alpha}{\beta} + \exp(-\beta t)\left(r_0 - \frac{\alpha}{\beta} \right), \frac{\gamma^2}{2\beta}(1 - \exp(-2\beta t)) \right)$$

besitzt.