Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
JProf. Dr. Luitgard Veraart · Daniel Gentner

# Finanzmathematik in stetiger Zeit (SS 2010)

Übungsblatt 7 und 8

**Aufgabe 1** (FV-Prozesse und quadratische Kovariationsprozesse)
Wir wissen bereits, dass der quadratische Variationsprozess eines FV-Prozesses $A$ der Nullprozess ist (Übungsblatt 3, Aufgabe 1), d.h.

$$\langle A \rangle_t \equiv 0, \quad t \geq 0.$$

Sei nun $X$ ein stetiges Semimartingal. Zeigen Sie, dass auch

$$\langle X, A \rangle_t \equiv 0, \quad t \geq 0.$$

Zeigen Sie ferner, dass für einen Prozess $(f_t(\omega))_t$ mit der Eigenschaft, dass zu jedem $t > 0$ eine Zufallsvariable $C(\omega)$ mit

$$f_s(\omega) \leq C(\omega), \quad 0 \leq s \leq t,$$

existiert, das zufällige Lebesgue-Stieltjes-Integral

$$(\omega, t) \mapsto \int_0^t f_s(\omega) dA_s(\omega)$$

wieder ein FV-Prozess ist. (Bemerken Sie, dass diese Bedingung sowohl Prozesse $f_s(\omega)$ mit stetigen Pfaden, als auch beschränkte Prozesse zulässt).

**Aufgabe 2** (Mehr zur Itô-Formel und SDGL's)
Sei $W$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass die gegebenen Prozesse jeweils die entsprechenden SDGL'en lösen:

(a) $X_t = \exp(W_t)$ und

$$dX_t = \frac{1}{2} X_t dt + X_t dW_t,$$

(b) $X_t = \frac{W_t}{1+t}$; $W_0 = 0$ und

$$dX_t = -\frac{1}{1+t} X_t dt + \frac{1}{1+t} dW_t,$$

(c) $X_t = \sin(W_t)$; $W_0 = a \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und

$$dX_t = -\frac{1}{2} X_t dt + \sqrt{1 - X_t^2} dW_t, \quad t < \inf \left\{ s > 0 : W_s \notin \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

(d) $(X_1(t), X_2(t)) = (t, e^t W_t)$ und

$$\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ X_2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{X_1} \end{pmatrix} dW_t.$$

(e) $(X_1(t), X_2(t)) = (\cosh(W_t), \sinh(W_t))$ und

$$\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \end{pmatrix} dW_t.$$

**Aufgabe 3** (Brownsche Brücke)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Wir betrachten die SDGL

$$dY_t = \frac{b - Y_t}{1 - t} dt + dW_t, \quad 0 \leq t \leq 1, Y_0 = a.$$

Zeigen Sie, dass

$$Y_t = a(1 - t) + bt + (1 - t) \int_0^t \frac{1}{1 - s} dB_s, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

diese löst und zeigen Sie, dass

$$\lim_{t \to 1} Y_t = b, \quad \text{f.s.}$$

($Y$ wird *Brownsche Brücke* von $a$ nach $b$ genannt.)

**Aufgabe 4** (Vorbereitung der Novikov-Bedingung)
Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung definierte Prozess $Z(\lambda)$ ein Supermartingal ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor: $Z(\lambda)$ ist ein lokales Martingal, lokalisieren Sie geeignet und wenden Sie Fatou's Lemma an.

**Aufgabe 5** (Maßwechsel an einem Beispiel)
Es seien $W$ eine Brownsche Bewegung definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\sigma > 0$ und

$$X_t = \mu t + \sigma W_t, \quad t \geq 0.$$

$X$ ist offensichtlich kein Martingal unter $\mathbb{P}$. Finden Sie ein Maß auf $\Omega$ unter dem $X$ ein Martingal ist.

**Aufgabe 6** (Beispiele von Martingaldarstellungen)
Sei $W$ eine Standard-Brownsche Bewegung. Finden Sie für die folgenden Zufallsvariablen $F \in L^2$ jeweils passende Prozesse $H \in L^2_W[0, T]$, so dass die Darstellung

$$F = \mathbb{E}F + \int_0^T H_s dW_s$$

gilt:
1.) $F = W_T$, 2.) $F = \int_0^T W_s ds$ 3.) $F = W_T^2$, 4.) $F = W_T^3$.